

УДК 629.78

ПОСТРОЕНИЕ ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПРОГРАММ УПРАВЛЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА ОКОЛОКРУГОВОЙ ОРБИТЕ

© 2025 г. С. А. Ишков, Г. А. Филиппов*

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, Самара, Россия

*e-mail: filippov.ga@ssau.ru

Поступила в редакцию 15.12.2023 г.

После доработки 26.02.2024 г.

Принята к публикации 10.03.2024 г.

Рассматривается задача построения множества номинальных оптимальных по Парето программ управления относительным движением маневрирующего на околокруговых орbitах космического аппарата относительно пассивной цели. Движение рассматривается в орбитальной цилиндрической системе координат в переменных, характеризующих вековое и периодическое движение в безразмерном виде, инвариантном по отношению к величине ускорения от тяги маневрирующего космического аппарата и высоте опорной орбиты. На основе аналитических исследований построены области граничных условий, допускающие применение более простых в реализации программ управления относительным движением с двумя включениями тяги с ориентацией в трансверсальном направлении. Получено решение двухкритериальной параметрической задачи для критериев: моторное время работы двигателя и общая продолжительность маневра. Применение принципа оптимальности Парето позволило упростить численную процедуру построения искомого множества не улучшаемых решений задачи из имеющейся выборки, удовлетворяющей граничным условиям перелета.

DOI: 10.31857/S0023420625020068, EDN: GNFVXR

1. ВВЕДЕНИЕ

Относительным движением будем называть движение центра масс маневрирующего космического аппарата (КА 2) относительно центра масс пассивного космического аппарата (КА 1) на орбитах, близких к круговым. Исследование законов формирования заданного относительного положения двух КА – важный этап при решении таких прикладных задач космического полета, как сближение космических аппаратов, организация их группового полета [1–3], приведение космического аппарата в точку стояния геостационарной орбиты [4], инспекция космических объектов [5].

При проектировании траекторий космических аппаратов основополагающей задачей является задача выбора номинального управления, которая может быть решена различными методами и с учетом технических ограничений

на взаимное относительное положение космических аппаратов, требованиями безопасного сближения с вращающимся объектом, ограничениями, связанными с возможностями обзора пространства радиоэлектронными бортовыми средствами [6–8].

Настоящая статья продолжает развитие ранее проведенных исследований [9], в которых с применением принципа максимума Понтрягина были получены и проанализированы структуры оптимального управления относительным движением для ряда типичных граничных условий. В данной работе исследуется возможность применения более простых в реализации программ с двумя включениями тяги в трансверсальном направлении, когда преобладает требование коррекции большой полуоси орбиты и фазы в относительном движении при незначительном изменении эксцентриситета орбиты.

При оптимизации управления для рассматриваемого круга задач очевидными критериями будут продолжительность маневра (задача быстродействия), а также суммарные затраты моторного времени (характеристической скорости). При введении в рассмотрение обоих критериев задача преобразуется в задачу многокритериальной оптимизации. Чаще всего исследователи используют подход, предусматривающий сведение многокритериальной задачи к однокритериальной. Так, авторами исследований [10, 11] разработана методика выбора номинального управления относительным движением в многокритериальной постановке, основанная на построении обобщенного критерия и его дальнейшей минимизации с учетом ограничений методом штрафных функций. В настоящей статье ставится задача построения исчерпывающего множества неулучшаемых решений задачи номинального управления относительным движением в рамках принятых ограничений на управление.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим движение маневрирующего космического аппарата (КА 2) относительно пассивного (КА 1). Движение каждого космического аппарата описывается набором из шести фазовых координат, записанных в геоцентрической орбитальной цилиндрической системе.

Введем допущения, традиционно принимаемые в ряде работ для рассматриваемого случая движения [10–14]:

1) расстояние между центрами масс КА 1 и КА 2 намного меньше модуля радиус-вектора КА 1;

2) орбита КА 1 – круговая или слабо эллиптическая с эксцентриситетом не более 0.01;

3) величина ускорения от тяги КА 2, отнесенная к гравитационному ускорению на орбите КА 1, составляет менее 10^{-2} , масса КА 2 постоянна;

4) движение рассматриваемых КА происходит в центральном гравитационном поле, влияние возмущающих сил не учитывается.

На основании введенных допущений разместим начало системы координат в центр масс КА 1 и запишем линеаризованные уравнения относительного движения [12–14]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \Delta r = \Delta V_r, \frac{d}{dt} \Delta L = \Delta V_u - \lambda \Delta r, \frac{d}{dt} \Delta z = \Delta V_z, \\ \frac{d}{dt} \Delta V_r = 2\lambda \Delta V_u + \lambda^2 \Delta r + a_S, \\ \frac{d}{dt} \Delta V_u = -\lambda \Delta V_r + a_T, \\ \frac{d}{dt} \Delta V_z = -\lambda^2 \Delta z + a_W. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь Δr – смещение КА 2 вдоль радиуса орбиты КА 1; ΔL – смещение КА 2 вдоль орбиты КА 1; Δz – смещение КА 2 в боковом направлении относительно орбиты КА 1; ΔV_r , ΔV_u и ΔV_z – разность скоростей КА 1 и КА 2 в радиальном, трансверсальном и боковом направлениях; a_S , a_T и a_W – проекции ускорения от тяги a КА 2 в радиальном, трансверсальном и боковом направлениях; λ – угловая скорость радиус-вектора КА 1:

$$\lambda = \sqrt{\mu \frac{(1-e^2)^3}{p^3}},$$

p , e – фокальный параметр и эксцентриситет орбиты КА 1.

Запишем систему (1) в матричном виде:

$$\Delta \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}, \quad (2)$$

Здесь $\Delta \mathbf{X} = [\Delta r \ \Delta L \ \Delta z \ \Delta V_r \ \Delta V_u \ \Delta V_z]^T$, $\mathbf{u} = [a_S \ a_T \ a_W]^T$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Применяя формулу Коши к уравнению динамики (1), получим выражение для определения фазового вектора в произвольный момент времени:

$$\Delta \mathbf{X}(t) = \mathbf{F}(t) \Delta \mathbf{X}(0) + \int_0^t \mathbf{F}(t-\tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{F}(t)$ – фундаментальная матрица системы (1), которая имеет вид [14]:

$$\mathbf{F}(t) = \\
 = \begin{bmatrix}
 2 - \cos(\lambda t) & 0 & 0 & \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} & \frac{2 - 2\cos(\lambda t)}{\lambda} & 0 \\
 2\sin(\lambda t) - 3\lambda t & 1 & 0 & \frac{2(\cos(\lambda t) - 1)}{\lambda} & \frac{4\sin(\lambda t) - 3\lambda t}{\lambda} & 0 \\
 0 & 0 & \cos(\lambda t) & 0 & 0 & \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} \\
 \lambda \sin(\lambda t) & 0 & 0 & \cos(\lambda t) & 2\sin(\lambda t) & 0 \\
 \lambda(\cos(\lambda t) - 1) & 0 & 0 & -\sin(\lambda t) & 2\cos(\lambda t) - 1 & 0 \\
 0 & 0 & -\lambda \sin(\lambda t) & 0 & 0 & \cos(\lambda t)
 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Интегральная часть матричного уравнения (3) определяется квадратурами в форме матриц [14]:

$$\int_0^t \mathbf{F}(t - \tau) B u(\tau) d\tau = \\
 = \int_0^{\lambda t} \begin{bmatrix}
 \frac{\sin(\lambda t - \psi)}{\lambda} & \frac{2(1 - \cos(\lambda t - \psi))}{\lambda} & 0 \\
 \frac{2(\cos(\lambda t - \psi) - 1)}{\lambda} & \frac{4\sin(\lambda t - \psi) - 3(\lambda t - \psi)}{\lambda} & 0 \\
 0 & 0 & \frac{\sin(\lambda t - \psi)}{\lambda} \\
 \cos(\lambda t - \psi) & 2\sin(\lambda t - \psi) & 0 \\
 -\sin(\lambda t - \psi) & 2\cos(\lambda t - \psi) - 1 & 0 \\
 0 & 0 & \cos(\lambda t - \psi)
 \end{bmatrix} u(t) d\psi. \quad (5)$$

Анализ фундаментальной матрицы (4) позволяет выявить закономерности относительного движения. В линейном приближении продольное пассивное движение (составляющие Δr , ΔL , ΔV_r и ΔV_u) не связано с боковым (составляющие Δz , ΔV_z). Анализ пассивного продольного движения показывает, что КА 2 двигается относительно КА 1 по эллипсу, центр которого смещается с постоянной скоростью по движению, если центр эллипса лежит ниже КА 1, или против движения, если центр эллипса лежит выше КА 1. Полуоси эллипса относятся как 2:1. Изменение боковых составляющих Δz , ΔV_z в пассивном движении будет подчиняться гармоническому закону.

В продольном относительном движении выделим вековые и периодические составляющие [12, 15]. Вековыми будем считать параметры,

характеризующие смещение центра эллипса и размер его малой полуоси, а периодической составляющей примем положение космического аппарата на эллипсе. В боковом движении вековым параметром будет амплитуда колебаний в боковой плоскости, а периодическим – фаза колебаний. Введем переменные

$$\begin{aligned}
 \Delta r_{cp} &= 2 \left(\Delta r + \frac{\Delta V_u}{\lambda} \right), \quad \Delta L_{cp} = \Delta L - 2 \frac{\Delta V_r}{\lambda}; \\
 l_x &= \Delta r + 2 \frac{\Delta V_u}{\lambda}, \quad l_y = \frac{\Delta V_r}{\lambda}; \\
 x_z &= \frac{\Delta V_z}{\lambda}, \quad y_z = \Delta z.
 \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь Δr_{cp} – среднее смещение КА 1 вдоль радиуса орбиты КА 2; ΔL_{cp} – среднее смещение КА 1 вдоль орбиты КА 2; $l_x = l \cos\phi$,

$l_y = l \sin\varphi$ – периодические составляющие продольного движения, $x_z = l_z \cos\varphi_z$, $y_z = l_z \sin\varphi_z$ – периодические составляющие движения в боковом направлении; $l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}$ – малая полуось эллипса продольного относительного движения; $l_z = \sqrt{x_z^2 + y_z^2}$ – амплитуда боковых колебаний, $\varphi = \arctan \frac{l_x}{l_y}$, $\varphi_z = \arctan \frac{x_z}{y_z}$ – фазовые углы.

Запишем дифференциальные уравнения для переменных (6). Для этого продифференцируем их правые и левые части по времени и после преобразований, учитывая систему (1), получим:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{r}_{cp} &= \frac{2a_T}{\lambda}, & \Delta \dot{L}_{cp} &= -1,5\lambda \Delta r_{cp} - \frac{2a_S}{\lambda}; \\ \dot{l}_x &= -\lambda l_y + \frac{2a_T}{\lambda}, & \dot{l}_y &= \lambda l_x + \frac{a_S}{\lambda}; \\ \dot{x}_z &= -\lambda y_z + \frac{a_W}{\lambda}, & \dot{y}_z &= \lambda x_z. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналитическое решение данной системы получается из решения матричного уравнения в квадратурах (5) с учетом преобразований (6):

$$\begin{aligned} \Delta r_{cp}(\lambda t) &= \Delta r_{cp_0} + \frac{2a}{\lambda^2} C, \\ \Delta L_{cp}(\lambda t) &= \Delta L_{cp_0} - 1,5\lambda t \Delta r_{cp_0} - \frac{a}{\lambda^2} D; \\ l_x(\lambda t) &= l_{x_0} - \frac{a}{\lambda^2} B, & l_y(\lambda t) &= l_{y_0} + \frac{a}{\lambda^2} A; \\ x_z(\lambda t) &= x_{z_0} + \frac{a}{\lambda^2} B_z, & y_z(\lambda t) &= y_{z_0} + \frac{a}{\lambda^2} A_z, \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\lambda t} [\delta_S \cos(\lambda t - \psi) + 2\delta_T \sin(\lambda t - \psi)] d\psi, \\ B &= \int_0^{\lambda t} [\delta_S \sin(\lambda t - \psi) - 2\delta_T \cos(\lambda t - \psi)] d\psi, \\ C &= \int_0^{\lambda t} \delta_T d\psi, \\ D &= \int_0^{\lambda t} [2\delta_S + 3\delta_T(\lambda t - \psi)] d\psi, \\ A_z &= \int_0^{\lambda t} \delta_W \sin(\lambda t - \psi) d\psi, \\ B_z &= \int_0^{\lambda t} \delta_W \cos(\lambda t - \psi) d\psi. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь δ_S , δ_T и δ_W – функции включения тяги в радиальном, трансверсальном и боковом направлении. В общем виде параметры управления определяются как

$$\begin{aligned} \delta_T &= \delta \cos \alpha \cos \beta, \\ \delta_S &= \delta \sin \alpha \cos \beta, \\ \delta_W &= \delta \sin \beta, \end{aligned}$$

где δ – функция включения тяги $\delta = \{0; 1\}$, α – угол между проекцией вектора тяги на плоскость орбиты и трансверсальным направлением, β – угол отклонения тяги от плоскости орбиты.

Приведем (7) систему к безразмерному виду. Для этого разделим правую и левую часть уравнений системы (7) на масштабный множитель $K = 2a\lambda^{-2}$ для фазовых координат и введем безразмерное время $\bar{t} = \lambda t$, после преобразований получим

$$\begin{aligned} \dot{\bar{r}}_{cp} &= \delta_T, & \dot{\bar{L}}_{cp} &= -1,5\Delta \bar{r}_{cp} - \delta_S; \\ \dot{\bar{l}}_x &= -\bar{l}_y + \delta_T, & \dot{\bar{l}}_y &= \bar{l}_x + \frac{\delta_S}{2}; \\ \dot{\bar{x}}_z &= -\bar{y}_z + \frac{\delta_W}{2}, & \dot{\bar{y}}_z &= \bar{x}_z. \end{aligned} \quad (10)$$

Решение системы (8) примет безразмерный вид:

$$\begin{aligned} \bar{r}_{cp}(\bar{t}) &= \bar{r}_{cp_0} + C, \\ \bar{L}_{cp}(\bar{t}) &= \bar{L}_{cp_0} - 1,5\bar{t} \Delta \bar{r}_{cp_0} - \frac{D}{2}; \\ \bar{l}_x(\bar{t}) &= \bar{l}_{x_0} - \frac{B}{2}, & \bar{l}_y(\bar{t}) &= \bar{l}_{y_0} + \frac{A}{2}; \\ \bar{x}_z(\bar{t}) &= \bar{x}_{z_0} + \frac{B_z}{2}, & \bar{y}_z(\bar{t}) &= \bar{y}_{z_0} + \frac{A_z}{2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Система (10) инвариантна к величине ускорения от тяги КА 2 и параметрам орбиты КА 1. Далее, для упрощения записи, верхний символ “–” будет опущен. Подразумевается, что все переменные безразмерны.

Для полноты модели запишем аналитические соотношения, описывающие изменение малой полуоси эллипса относительного движения и амплитуды боковых колебаний:

$$\begin{aligned} l^2(t) &= l_0^2 + l_0 \sqrt{A^2 + B^2} \sin\left(\varphi + t + \arctan \frac{B}{A}\right) + \frac{A^2 + B^2}{4} \\ l_z^2(t) &= l_{z_0}^2 + l_{z_0} \sqrt{A_z^2 + B_z^2} \sin\left(\varphi + t + \arctan \frac{B_z}{A_z}\right) + \\ &+ \frac{A_z^2 + B_z^2}{4}. \end{aligned} \quad (12)$$

Далее рассматривается только продольное относительное движение, а управление маневрирующим космическим аппаратом осуществляется переключением знака трансверсальной составляющей вектора тяги, радиальная составляющая не используется. В этом случае $\alpha = 0$ или 180° , $\beta = 0$, из чего следует $\delta_T = \delta = \{-1; 0; 1\}$, где нуль соответствует пассивному участку, а плюс и минус единица – значения ориентации вектора тяги против и по вектору скорости КА 2 соответственно.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПРОГРАММ УПРАВЛЕНИЯ ПРОДОЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ

Обоснуем структуру управления с двумя включениями тяги в трансверсальном направлении. При трансверсальной ориентации вектора тяги уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned}\dot{\Delta r}_{\text{cp}} &= \delta, & \dot{\Delta L}_{\text{cp}} &= -1,5\Delta r_{\text{cp}}, \\ \dot{l}_x &= \delta - l_y, & \dot{l}_y &= l_x, \\ \dot{t}_{\text{мот}} &= |\delta|.\end{aligned}\quad (13)$$

Здесь δ – функция знака тяги, которая может принимать значения $\delta = \{-1; 0; 1\}$, где “минус 1” соответствует ориентации тяги в трансверсальном отрицательном направлении, “плюс 1” – в положительном, а нуль соответствует пассивному участку. Таким образом, рассматривается задача о минимуме моторного времени при фиксированном общем.

В соответствии с алгоритмом принципа максимума Понтрягина запишем гамильтониан системы (13), получим [16]:

$$H = \delta \Psi_{\Delta r_{\text{cp}}} - 1.5\Psi_{\Delta L_{\text{cp}}} \Delta r_{\text{cp}} + \Psi_{l_x} (\delta - l_y) + \Psi_{l_y} l_x - |\delta|,$$

где $\Psi_{\Delta r_{\text{cp}}}$, $\Psi_{\Delta L_{\text{cp}}}$, Ψ_{l_x} и Ψ_{l_y} – сопряженные переменные, уравнения для которых имеют вид

$$\begin{aligned}\Psi_{\Delta r_{\text{cp}}} (t) &= \Psi_{\Delta r_{\text{cp}0}} + 1.5t\Psi_{\Delta L_{\text{cp}0}}, \\ \Psi_{\Delta L_{\text{cp}}} (t) &= \Psi_{\Delta L_{\text{cp}0}}, \\ \Psi_{l_x} (t) &= \sqrt{\Psi_{l_{x0}}^2 + \Psi_{l_{y0}}^2} \cos \left(t + \arctan \left(\frac{\Psi_{l_{y0}}}{\Psi_{l_{x0}}} \right) \right), \\ \Psi_{l_y} (t) &= \sqrt{\Psi_{l_{x0}}^2 + \Psi_{l_{y0}}^2} \sin \left(t + \arctan \left(\frac{\Psi_{l_{y0}}}{\Psi_{l_{x0}}} \right) \right).\end{aligned}$$

Оптимальное управление определим из условия максимума гамильтониана, получим:

$$\delta_{\text{опт}} = \begin{cases} -1 & \Psi_{\Delta r_{\text{cp}}} + \Psi_{l_x} \leq -1; \\ 0 & -1 < \Psi_{\Delta r_{\text{cp}}} + \Psi_{l_x} < 1; \\ 1 & \Psi_{\Delta r_{\text{cp}}} + \Psi_{l_x} \geq 1. \end{cases} \quad (14)$$

Анализ оптимального управления (14) показывает, что оно определяется знаком суммы линейной ($\Psi_{\Delta r_{\text{cp}}}$) и гармонической (Ψ_{l_x}) функций времени. Нетрудно заметить, что при доминировании требования коррекции векового движения (составляющие Δr_{cp} и ΔL_{cp}) оптимальное управление будет стремиться к структуре с двумя включениями тяги разного знака, которые разделены пассивным участком. Если же граничные условия таковы, что доминирует требование коррекции периодических составляющих движения, возможна структура управления с включениями тяги одного знака (см. рис. 4 в работе [9]).

Отобразим на фазовой плоскости ($\Delta r_{\text{cp}} - \Delta L_{\text{cp}}$) линии переключения и характерные фазовые траектории для следующей задачи: определить оптимальные траектории движения в рамках линеаризованной модели, обеспечивающие приведение параметров Δr_{cp} , ΔL_{cp} и l в нулевые значения при доминировании составляющих Δr_{cp} и ΔL_{cp} (рис. 1).

В задаче управления вековыми составляющими движения, без учета граничного условия для малой полуоси эллипса относительного движения, программа управления будет иметь классическую структуру с двумя включениями тяги разного знака, разделенными пассивным участком с нулевым начальным пассивным участком (участком ожидания). На рис. 1 это, например, траектория ACC_1O или ABB_2O .

Существует траектория, характеризующаяся пассивным участком нулевой продолжительности, на рис. 1 это траектория ADO , для которой характерно минимальное общее время и максимальное моторное.

Существует траектория, характеризующаяся первым активным участком нулевой продолжительности, на рис. 1 это траектория BB_2O или CC_1O , для которой характерно минимальное моторное время и максимальное общее.

Можно выделить две траектории, приводящие параметры Δr_{cp} и ΔL_{cp} в нулевые значения без переключения – это траектории F_1O и FO . Линию FF_1 назовем линией переключения, которая делит фазовую плоскость на область 1 и область 2. В области 1 знак тяги на первом активном участке равен $\delta = 1$, а в области 2 он равен $\delta = -1$.

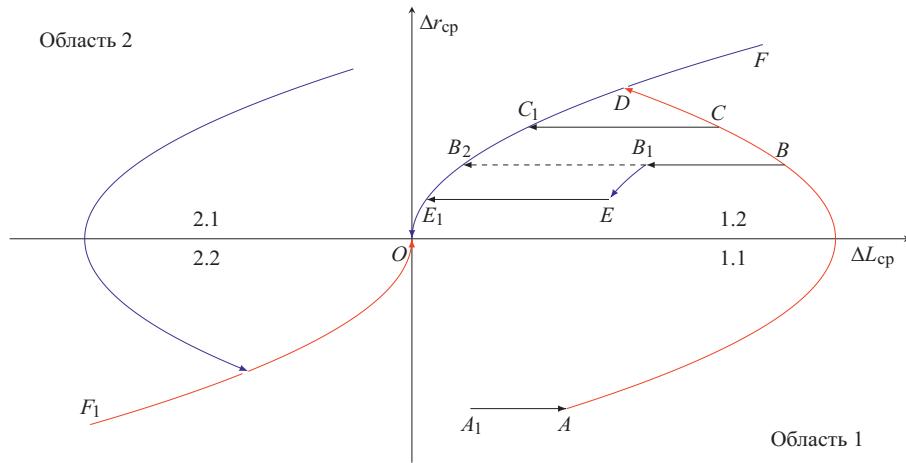


Рис. 1. Анализ траекторий векового движения

Теперь вернемся к задаче (13)–(14) с учетом граничного условия для малой полуоси эллипса относительного движения. Как упоминалось ранее, возможен вариант, когда активные участки могут быть как разного знака с ненулевым участком ожидания, так и одинакового.

Анализ показывает, что в каждой из областей 1 и 2 можно выделить подобласти 1.1 и 1.2, 2.1 и 2.2, получаемые делением исходных областей осью абсцисс. Если начальная точка принадлежит подобласти 1.1 или 2.1, как, например, точка А, то структура управления будет иметь два включения тяги разного знака, разделенные пассивным участком. Если начальная точка принадлежит

подобласти 1.2 или 2.2, как, например, точка В, то структура управления может иметь как один активный участок (траектория BB_2O или CC_1O), так и два активных участка разного (траектория A_1ABB_2O или A_1ACC_1O на рис. 2) или одинакового знака (траектория BB_1EE_1O).

Нетрудно показать, что все траектории с активными участками одного знака для фиксированной начальной точки будут эквивалентными по затратам моторного времени. При этом следует отметить, что траектория BB_2O будет более выигрышной, чем BB_1EE_1O , с точки зрения затрат общего времени на коррекцию.

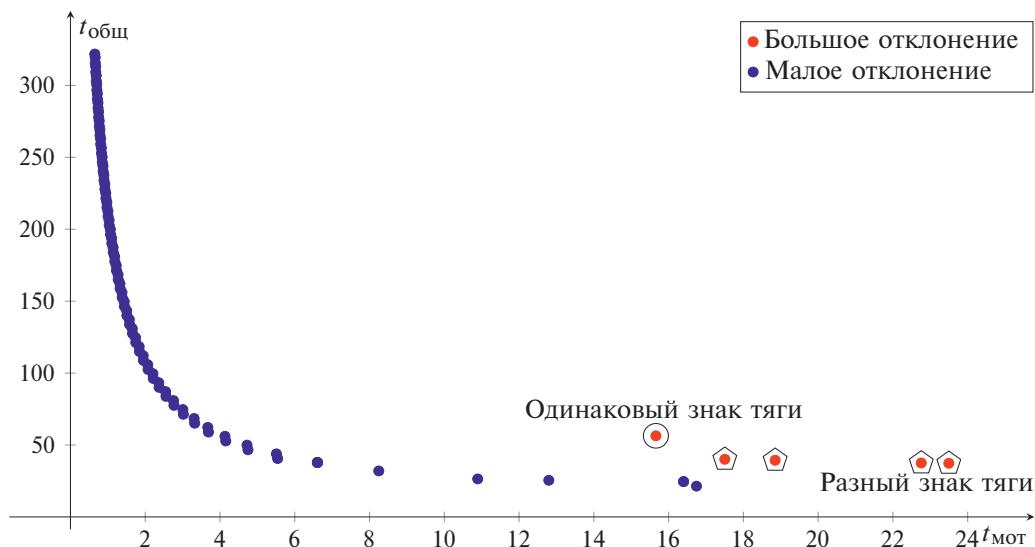


Рис. 2. Множество Парето оптимальных решений задачи для граничных условий малое отклонение и большое отклонение

Резюмируя вышесказанное, введем в рассмотрение структуры управления с двумя включениями тяги разного или одинакового знака, соответствующие оптимальным траекториям, в которых в явном виде включим в рассмотрение параметры управления – размеры активных (t_1 и t_1) и пассивных участков (участок ожидания размером p_0 и пассивный участок между активными размером p_1), которые должны удовлетворять граничным условиям задачи

$$\begin{aligned} t = 0 : \Delta r_{cp} &= \Delta r_{cp0}, \Delta L_{cp} = \Delta L_{cp0}, l_x = l_{x0}, l_y = l_{y0}, \\ t = t_k : \Delta r_{cp} &= 0, \Delta L_{cp} = 0, l_x = 0, l_y = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

и доставлять минимум критериям задачи

$$\begin{aligned} t_{\text{мот}} &= t_1 + t_2 \rightarrow \min, \\ t_{\text{общ}} &= p_0 + t_1 + p_1 + t_2 \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (16)$$

где $t_{\text{мот}}$ (сумма затраты моторного времени) и $t_{\text{общ}}$ (сумма затрат общего времени) являются двумя независимыми критериями задачи. Данная задача является двухкритериальной, в которой и моторное и общее время рассматриваются как два независимых критерия.

В соответствии с проведенным анализом определим знак тяги на первом активном участке через начальные и конечные граничные условия для векторных составляющих движения $\Delta r_{cp} - \Delta L_{cp}$:

$$\delta = \text{sign} \left(\frac{2}{3} (\Delta L_{cp0} - \Delta L_{cp_k}) - \frac{\Delta r_{cp0} |\Delta r_{cp0}|}{2} \right). \quad (17)$$

На втором участке он будет противоположным.

Для расчета программ управления относительным движением используется следующий прием. Определяются размеры активных участков как функции граничных условий для векторного движения, т.е. начальных и конечных Δr_{cp} и ΔL_{cp} , и размеров пассивных участков p_0 и p_1 , которые являются свободными параметрами и выбираются исходя из требований удовлетворения граничных условий для периодического движения – начальные и конечные l_x и l_y .

Рассмотрим задачу управления относительным движением по программе с *двумя включениями тяги разного знака*. Для рассматриваемой структуры управления аналитическое решение (10) примет вид

$$\begin{cases} \Delta r_{cp}(t) = \Delta r_{cp0} + \delta(t_1 - t_2) = 0, \\ \Delta L_{cp}(t) = \Delta L_{cp0} - \frac{3}{2}(p_0 + t_1 + p_1 + t_2)\Delta r_{cp0} - \frac{3}{4}\delta(t_1^2 - t_2^2 + 2t_1(t_2 + p_1)) = \Delta L_{cp_k}, \\ l_x(t) = l_0 \cos(\phi_0 + p_0 + t_1 + p_1 + t_2) + \delta(\sin(t_1 + p_1 + t_2) - \sin(p_1 + t_2) - \sin(t_2)) = 0, \\ l_y(t) = l_0 \sin(\phi_0 + p_0 + t_1 + p_1 + t_2) + \delta(\cos(p_1 + t_2) - \cos(t_1 + p_1 + t_2) + \cos(t_2) - 1) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Из первых двух уравнений системы (18) определим размеры активных участков:

$$\begin{aligned} t_1 &= -\frac{p_1}{2} - \delta \Delta r_{cp0} + \sqrt{\frac{p_1^2}{4} + \delta \left(\frac{2}{3} (\Delta L_{cp0} - \Delta L_{cp_k}) - \Delta r_{cp0} p_0 \right) + \frac{\Delta r_{cp0}^2}{2}}, \\ t_2 &= -\frac{p_1}{2} + \sqrt{\frac{p_1^2}{4} + \delta \left(\frac{2}{3} (\Delta L_{cp0} - \Delta L_{cp_k}) - \Delta r_{cp0} p_0 \right) + \frac{\Delta r_{cp0}^2}{2}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Определим критериальные функции задачи (16); учитывая размеры активных участков (19), получим:

$$\begin{aligned} t_{\text{мот}} &= -\delta \Delta r_{cp0} - p_1 + \sqrt{p_1^2 + \frac{4}{3} \delta \left[2(\Delta L_{cp0} - \Delta L_{cp_k}) - 3 \Delta r_{cp0} p_0 \right] + 2 \Delta r_{cp0}^2}, \\ t_{\text{общ}} &= -\delta \Delta r_{cp0} + p_0 + \sqrt{p_1^2 + \frac{4}{3} \delta \left[2(\Delta L_{cp0} - \Delta L_{cp_k}) - 3 \Delta r_{cp0} p_0 \right] + 2 \Delta r_{cp0}^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Из критериальных функций (20) определим размер пассивного участка как функцию критерия:

$$p_1(t_{\text{мот}}) = \frac{6\Delta r_{\text{cp}_0}^2 - 3(\delta\Delta r_{\text{cp}_0} + t_{\text{мот}})^2 + 4\delta[2(\Delta L_{\text{cp}_0} - \Delta L_{\text{cp}_K}) - 3p_0\Delta r_{\text{cp}_0}]}{6(\delta\Delta r_{\text{cp}_0} + t_{\text{мот}})}, \quad (21)$$

$$p_1(t_{\text{общ}}) = \sqrt{(\delta\Delta r_{\text{cp}_0} + t_{\text{мот}} - p_0)^2 - 2(\Delta r_{\text{cp}_0} - \delta p_0)^2 + 2p_0^2 - \frac{8}{3}\delta(\Delta L_{\text{cp}_0} - \Delta L_{\text{cp}_K})}. \quad (22)$$

Приравняв правые части (21) и (22), получим границы множества оптимальных по Парето решений:

$$t_{\text{общ}}(t_{\text{мот}}) = \frac{3(t_{\text{мот}} + p_0)^2 - 3(\delta\Delta r_{\text{cp}_0} + p_0)^2 + 6\Delta r_{\text{cp}_0}^2 + 8\delta(\Delta L_{\text{cp}_0} - \Delta L_{\text{cp}_K})}{6(\delta\Delta r_{\text{cp}_0} + t_{\text{мот}})}. \quad (23)$$

Определим, в каких пределах могут изменяться критерии задачи для рассматриваемой структуры управления. *Максимальное*

значение моторного времени достигается при нулевом размере пассивного участка. Запишем:

$$\max(t_{\text{мот}}) = (t_1 + t_2) \Big|_{p_1=0} = -\delta\Delta r_{\text{cp}_0} + \sqrt{2\Delta r_{\text{cp}_0}^2 + 4\delta\left(\frac{2}{3}(\Delta L_{\text{cp}_0} - \Delta L_{\text{cp}_K}) - \Delta r_{\text{cp}_0} p_0\right)}. \quad (24)$$

Определим *минимум моторного времени*. Существует такое p_1 , при котором размер первого активного участка обращается в нуль:

$t_1 = 0$, при

$$p_1 = \frac{-3\Delta r_{\text{cp}_0}^2 + 2\delta[2(\Delta L_{\text{cp}_0} - \Delta L_{\text{cp}_K}) - 3\Delta r_{\text{cp}_0} p_0]}{6\delta\Delta r_{\text{cp}_0}}. \quad (25)$$

Приравняв правую часть (25) к правой части (21) и решив полученное уравнение относительно $t_{\text{мот}}$, получим:

$$\min(t_{\text{мот}}) = |\Delta r_{\text{cp}_0}|. \quad (26)$$

Подставив выражение (24) и/или (26) в равенство (23), можно получить нижнее и верхнее значения общего времени.

Теперь рассмотрим полную задачу, с учетом граничного условия для периодического движения, — определим размеры пассивных участков, удовлетворяющие граничному условию для малой полуоси эллипса относительного движения. Для этого необходимо решить численно третье и четвертое уравнение системы (18) относительно неизвестных — размера участка ожидания p_0 и размера пассивного участка p_1 ; размеры активных участков нужно определять по формуле (19).

Для решения поставленной задачи разработан численный алгоритм, в основу которого положена оценка предельного приращения малой полуоси эллипса относительного движения.

Определим придельное приращение малой полуоси эллипса относительного движения на основе следующих соображений. В уравнении (12) введем допущение о том, что $\delta \sin(\phi_0 + p_0 + t_1 + p_1 + t_2 + \arctan \frac{B}{A}) = -1$, т.е. упомянутый синус равен экстремальному значению. При $t_K = 0$ оставшаяся его часть примет вид $l_0 = \sqrt{A^2 + B^2}$, где A и B есть второе слагаемое в правой части третьего и четвертого уравнений системы (18). Можно записать:

$$A^2 + B^2 = 4\left(\sin^2 \frac{t_1}{2} + \sin^2 \frac{t_2}{2}\right) - 8 \sin \frac{t_1}{2} \sin \frac{t_2}{2} \cos\left(p_1 + \frac{t_1 + t_2}{2}\right). \quad (27)$$

Можно заметить, что при размере пассивного участка кратном половине орбитального периода $p_1 = \pi N - \frac{t_1 + t_2}{2}$, где N — натуральные числа, достигается предельное приращение малой полуоси эллипса относительного движения:

$$A^2 + B^2 \Big|_{t_{\Pi} = \pi - \frac{t_1 + t_2}{2}} = 4 \left(\sin \frac{t_1}{2} + \sin \frac{t_2}{2} \right)^2. \quad (28)$$

Как следует из последнего равенства, предельное приращение малой полуоси эллипса относительного движения в этом случае составит *четыре* безразмерных единицы, что определяет область начальных условий по приращению малой полуоси эллипса относительного движения, допускающую применение программ с двумя включениями тяги.

Таким образом, варьирование параметра N (размера пассивного участка) приводит к получению

серии решений задачи, некоторые из которых оптимальны по Парето. Размер участка ожидания целесообразно выбрать из требования удовлетворения введенного допущения. На основании проведенного исследования составлен алгоритм решения задачи, реализованный в программную оболочку.

Рассмотрим задачу управления относительным движением по программе с *двумя включениями тяги одинакового знака*. Расчет программы управления базируется на тех же принципах, что и программы с двумя включениями тяги разного знака. Запишем решение, аналогичное (18), получим

$$\begin{cases} \Delta r_{cp}(t) = \Delta r_{cp_0} + \delta(t_1 + t_2) = 0, \\ \Delta L_{cp}(t) = \Delta L_{cp_0} - \frac{3}{2}(p_0 + t_1 + p_1 + t_2)\Delta r_{cp_0} + \frac{3}{4}\delta(t_2^2 + t_1^2 + 2t_1(t_2 + p_1)) = \Delta L_{cp_k}, \\ l_x(t) = l_0 \cos(\phi_0 + p_0 + t_1 + p_1 + t_2) + \delta(\sin(t_1 + p_1 + t_2) - \sin(p_1 + t_2) + \sin(t_2)) = 0, \\ l_y(t) = l_0 \sin(\phi_0 + p_0 + t_1 + p_1 + t_2) + \delta(\cos(p_1 + t_2) - \cos(t_1 + p_1 + t_2) - \cos(t_2) + 1) = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Определим размеры активных участков из первых двух уравнений системы (29) как функции граничных условий для векового движения и размеров пассивных участков:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{3\Delta r_{cp_0}^2 + 2\delta[2(\Delta L_{cp_0} - \Delta L_{cp_k}) - 3\Delta r_{cp_0}(p_0 + p_1)]}{6t_{\Pi}}, \\ t_2 &= -\frac{3\Delta r_{cp_0}^2 + 2\delta[2(\Delta L_{cp_0} - \Delta L_{cp_k}) - 3\Delta r_{cp_0}p_0]}{6t_{\Pi}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь знак ускорения от тяги на активных участках одинаков и противоположен по отношению к равенству (17). Управление (30) удовлетворяет граничным условиям для векового движения области 1.2 и 2.2 (см. рис. 1) в любом их сочетании. Для удовлетворения граничного условия для периодического продольного движения необходимо выбрать строго определенные размеры пассивных участков, которые являются корнями третьего и четвертого уравнения системы (29).

Покажем, что в рассматриваемом случае двухкритериальная задача вырождена. Учитывая (30), определим критерии задачи (16):

$$\begin{aligned} t_{\text{мот}} &= t_1 + t_2 = |\Delta r_{cp_0}|, \\ t_{\text{общ}} &= p_0 + p_1 + |\Delta r_{cp_0}|. \end{aligned} \quad (31)$$

Как следует из выражений (31), критерий “*моторное время*” не зависит от размера пассивного

участка и равен абсолютной разности граничных условий для среднего радиуса орбиты, а критерий “*общее время*” линейно увеличивается при увеличении размера пассивного участка. Таким образом, многокритериальная задача сводится к одному единственному решению с минимальными размерами p_0 и p_1 , удовлетворяющими граничному условию для периодического продольного движения, т.е. являющимися корнями третьего и четвертого уравнений системы (21).

Решить поставленную задачу можно численно. Как показало проведенное исследование данной задачи, размер участка ожидания целесообразно выбрать несколько большим, чем размер пассивного участка, определенный по формуле (25), а размер пассивного участка принять равным 2π .

4. СРАВНЕНИЕ ПРОГРАММ УПРАВЛЕНИЯ С ДВУМЯ ВКЛЮЧЕНИЯМИ ТЯГИ С ОПТИМАЛЬНЫМИ

В первую очередь рассмотрим вопрос близости предложенного управления с двумя включениями тяги к оптимальному. Решим задачу выбора размеров активных и пассивных участков для начальных условий движения

$$\Delta r_{cp_0} = 36.3, \Delta L_{cp_0} = 2720, l_0 = 2, \phi_0 = 0 \quad (32)$$

при нулевых конечных условиях.

Для граничных условий (32) нами ранее, с применением принципа максимума Понтрягина, было получено оптимальное управление с трансверсальной ориентацией вектора тяги [9]. Решим данную задачу с применением программ управления с двумя включениями тяги. Данная задача имеет три решения по программам с разным знаком тяги и одно с одинаковым. Все найденные решения оптимальны по Парето, в табл. 1 приведены размеры участков.

Как следует из табл. 1, степень неоптимальности получаемого параметрического решения уменьшается по мере увеличения размера пассивного участка. Действительно, при решении оптимизационной задачи [9] в области сравнительно больших затрат моторного времени (решение 1.1 и 1.2) имело место пять включений тяги, а по мере уменьшения затрат моторного времени оно уменьшилось до трех, в то время как в рамках параметрического подхода мы ограничены только двумя включениями тяги, чем можно и объяснить достаточно большой проигрыш по критериям задачи.

Таблица 1. Решения задачи (32)

| № | $t_{\text{мот}}$ | $t_{\text{общ}}$ | p_0 | t_1 | p_1 | t_2 | % от оптимального* |
|--|------------------|------------------|---------|---------|---------|---------|--------------------|
| <i>1. Структура с двумя включениями тяги разного знака</i> | | | | | | | |
| 1.1 | 58.2216 | 63.7344 | 2.0022 | 10.9608 | 3.5106 | 47.2608 | 113 |
| 1.2 | 52.9248 | 64.0684 | 1.8321 | 8.3124 | 9.3114 | 44.6124 | 106 |
| 1.3 | 47.6924 | 64.7180 | 1.1433 | 5.6962 | 15.8823 | 41.9962 | 103 |
| <i>2. Структура с двумя включениями тяги одного знака</i> | | | | | | | |
| 2.1 | 36.3000 | 69.1883 | 29.2242 | 10.7411 | 3.6640 | 25.5589 | 101 |

Примечание. *Для подсчета степени неоптимальности программ с разным знаком тяги на активных участках была решена краевая задача оптимального управления (14) при общем времени, показанном в таблице. Полученное оптимальное моторное время отнесено к моторному времени, показанному в таблице. Для программы с одинаковым знаком тяги фиксировалось моторное время, а приведенное число подсчитано по общему времени.

Таблица 2. Начальные условия движения активного космического аппарата в оскулирующих элементах

| Вариант начальных условий | Большая полуось, км | Эксцентриситет | Истинная аномалия, град | Аргумент широты, град |
|---------------------------|---------------------|-------------------|-------------------------|-----------------------|
| Малое отклонение | 42 164.16 | 10^{-4} | 0 | 4 |
| Большое отклонение | 42 464.16 | $1 \cdot 10^{-3}$ | 0 | 20 |

Таблица 3. Начальные условия движения в терминах векового и периодического движения

| Вариант начальных условий | Δr_{cp} | ΔL_{cp} | l | Φ |
|---------------------------|------------------------|------------------------|-----------------|--------|
| Малое отклонение | 0 км (0) | 2943 км (156.52) | 4.21 км (0.22) | 0 |
| Большое отклонение | 300 км (15.66) | 14807 км (787.41) | 43.06 км (2.29) | 0 |

5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИВЕДЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ЗАДАННУЮ ТОЧКУ СТОЯНИЯ ГЕОСТАЦИОНАРНОЙ ОРБИТЫ

Рассмотрим задачу номинального приведения космического аппарата, имеющего ускорение от тяги $5 \cdot 10^{-5}$ м/с², в точку стояния геостационарной орбиты ($\lambda = 7.29211 \cdot 10^{-5}$ с⁻¹) нуль градусов восточной долготы, параметр $K = 18.8058$ км.

Можно отметить особенность данной задачи, связанную с тем, что в качестве КА 1 рассматривается не конкретный космический аппарат, а некоторая точка геостационарной орбиты, в которой по истечении некоторого времени должен оказаться КА 2.

В табл. 2 и 3 показаны параметры орбиты маневрирующего КА в начальный момент времени в оскулирующих элементах и терминах векового и периодического движения. В табл. 3 в скобках приведены безразмерные значения.

Расчет параметров управления, размеров пассивных участков, программ управления с двумя включениями тяги выполнен на безразмерной

линейной модели, а моделирование выполнено на модели движения в равноденственных элементах.

В табл. 4 показаны методические ошибки (параметры относительного движения в конечный момент времени), обусловленные линеаризацией уравнений движения. На рис. 2 показано множество Парето для граничных условий – малое и большое отклонение.

Как следует из рис. 2, для граничных условий “малое отклонение” найдено 112 решения, из которых только 101 формирует множество Парето. Для граничных условий “большое отклонение” найдено шесть (пять с разным знаком тяги и одно с одинаковым) решений задачи, пять (четыре с разным знаком тяги и одно с одинаковым) из которых формируют множество Парето. Множество Парето имеет дискретный характер, что связано с необходимостью выбора пассивных участков строго определенного размера.

На рис. 3 и 4 показан пример траектории приведения маневрирующего космического аппарата в заданную точку стояния по программе с разным (решение 1.3 по табл. 1) и одинаковым (решение 2.1 по табл. 1) знаком тяги на активных участках.

Как следует из табл. 3, вполне понятно, что чем меньше начальное отклонение параметров движения КА от заданных, тем выше точность. Наибольшую сложность при решении данной задачи вызывает управление эксцентризитетом орбиты. На заключительном включении тяги он изменяется по гармоническому закону от практически нулевого до некоторого амплитудного значения, в то время как оставшиеся параметры – по закону близкому к линейному, для широты точки стояния, и кусочно-линейному, для большой полуоси. Методические ошибки, обусловленные линеаризацией уравнений движения, невелики и в последствии могут быть устранены путем уточнения размеров активных и пассивных участков на нелинейной модели движения. Как показал численный расчет, размеры участков изменяются незначительно, на величину менее 1 %.

Таблица 4. Методические ошибки, обусловленные линеаризацией уравнений движения

| Вариант начальных условий | Δr_{cp} (ошибка по большой полуоси, км) | ΔL_{cp} (ошибка по долготе точки стояния) | l (ошибка по эксцентризитету) |
|---------------------------|---|---|----------------------------------|
| Малое отклонение | 1...10 м | 0.4...4 км (менее 0.005°) | $0.2...2$ км (менее 10^{-5}) |
| Большое отклонение | 2...2.4 км | 90...100 км (порядка 0.13°) | $2...12$ км (порядка 10^{-5}) |

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование программ управления относительным движением с двумя включениями тяги в трансверсальном направлении на безразмерной модели относительного движения в терминах вековых и периодических составляющих в двухкритериальной постановке – минимум моторного и минимум общего времени – позволило получить следующие выводы:

1. Применение построенных программ управления с двумя включениями тяги в разных направлениях возможно при любых сочетаниях граничных условий перелета по вековым составляющим относительного движения, в то время как программа с включениями тяги в одинаковом направлении возможна только в строго очерченной области. Для программы с двумя включениями тяги разного знака получены аналитические соотношения, позволяющие очертить границу множества Парето.

2. Для программ с двумя включениями тяги получены аналитические соотношения, связывающие граничные условия задачи для векового движения с размерами активных участков программ управления. Варьирование размера пассивного участка для программ с разным знаком тяги позволило построить эффективный алгоритм получения серии неулучшаемых по Парето программ управления относительным движением.

3. Проведено исследование возможности коррекции периодических составляющих относительного движения с применением программ управления с двумя включениями тяги, которое показало, что предельное их приращение составит четыре безразмерных единицы, что окончательно очерчивает область применения разработанных программ управления.

4. Сравнение разработанных программ с оптимальными программами управления продольным относительным движением с пассивным участком показало их близость.

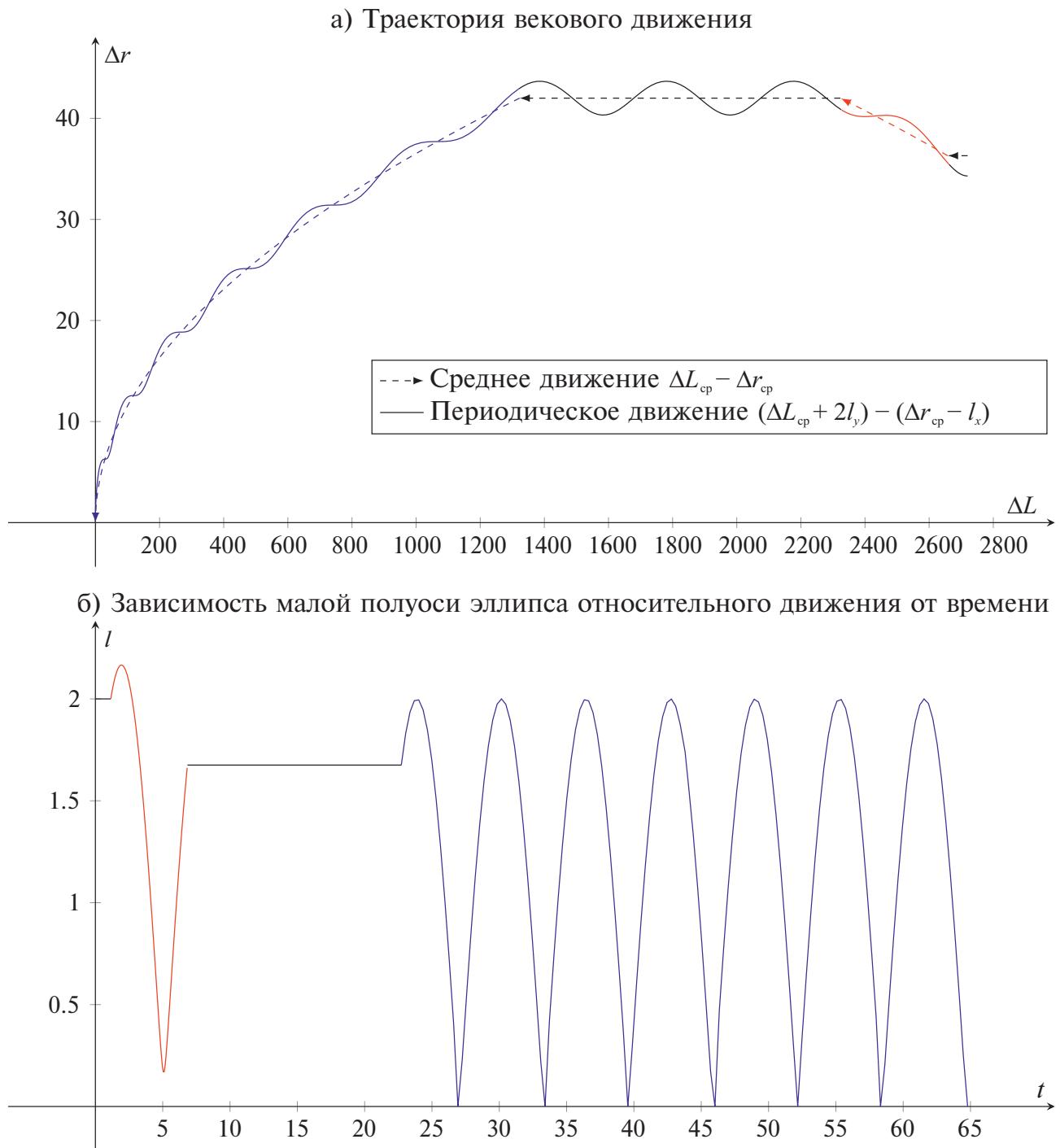


Рис. 3. Пример траектории векового движения (сверху) и зависимости малой полуоси эллипса относительного движения от времени (снизу), управление по программе с двумя включениями тяги разного знака

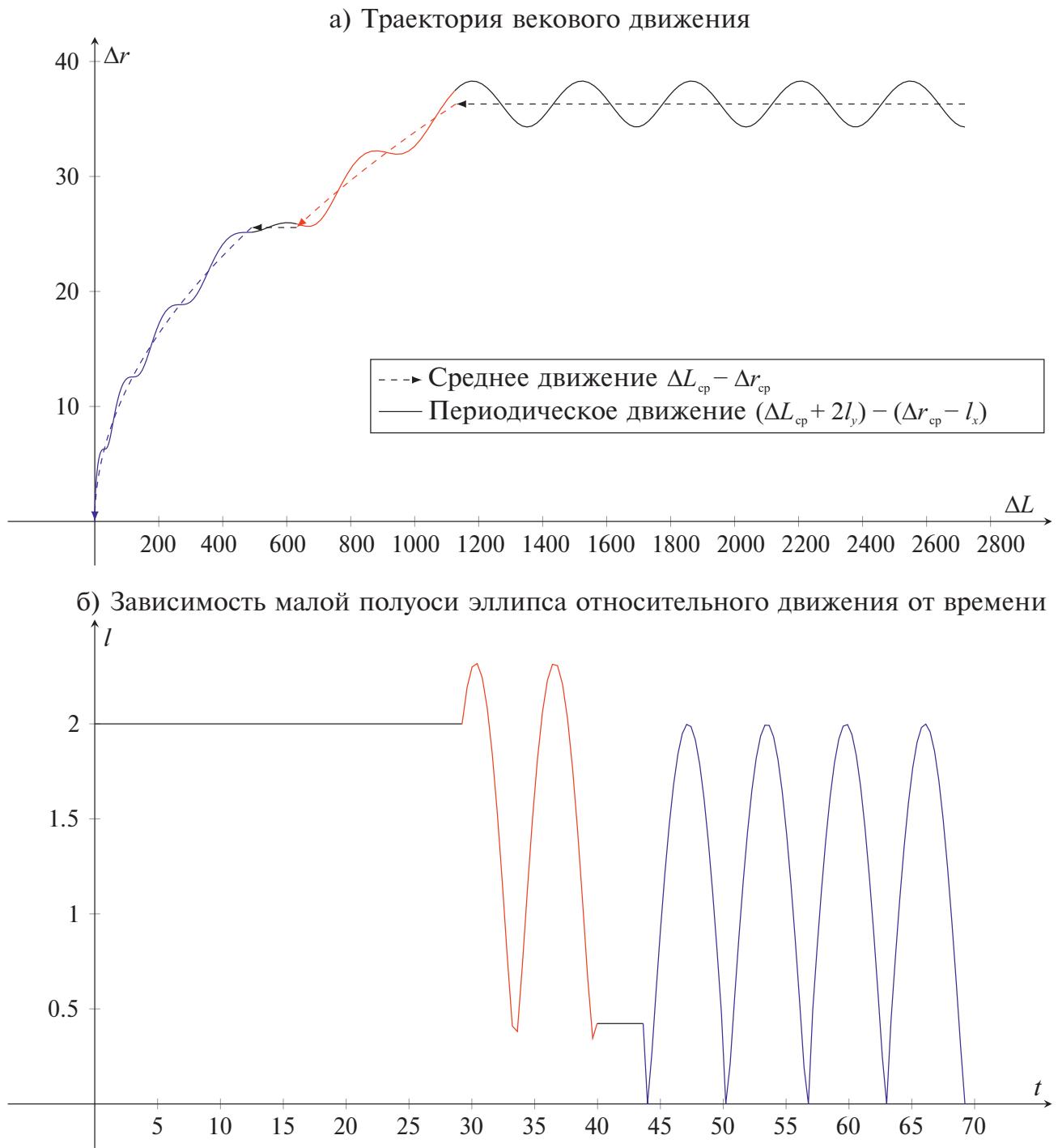


Рис. 4. Пример траектории векового движения (сверху) и зависимости малой полуоси эллипса относительного движения от времени (снизу), управление по программе с двумя включениями тяги одинакового знака

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sabatini M., Palmerini G.B.* Mixed-integer GA optimization for the tracking control of a formation of small satellites equipped with multi-constrained electric thrusters // *Acta Astronautica*. 2023. V. 202. P. 1–8. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2022.10.009>
2. *Song Y., Park S.-Y., Lee S. et al.* Spacecraft formation flying system design and controls for four nanosats mission // *Acta Astronautica*. 2021. V. 186. P. 148–163. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.05.013>
3. *Li S., Liu Ch., Sun Zh.* Finite-time distributed hierarchical control for satellite cluster with collision avoidance // *Aerospace Science and Technology*. 2021. V. 114. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2021.106750>
4. *Li L., Zhang J., Li Y. et al.* Geostationary station-keeping with electric propulsion in full and failure modes // *Acta Astronautica*. 2019. V. 163. Pt B. P. 130–144. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2019.03.021>
5. *Corpino S., Stesina F.* Inspection of the cis-lunar station using multi-purpose autonomous Cubesats // *Acta Astronautica*. 2020. V. 175. P. 591–605. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2020.05.053>
6. *Zhao X., Zhang Sh.* Adaptive saturated control for spacecraft rendezvous and docking under motion constraints // *Aerospace Science and Technology*. 2021. V. 114. Art. ID. 106739. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2021.106739>
7. *Guo Y., Zhang D., Li Ai-jun et al.* Finite-time control for autonomous rendezvous and docking under safe constraint // *Aerospace Science and Technology*. 2021. V. 109. Art. ID. 106380. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2020.106380>
8. *Zhang Y., Zhu B., Cheng M. et al.* Trajectory optimization for spacecraft autonomous rendezvous and docking with compound state-triggered constraints // *Aerospace Science and Technology*. 2022. V. 127. Art. ID. 107733. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2022.107733>
9. *Ишков С.А., Филиппов Г.А.* Исследование оптимальных программ управления относительным движением космического аппарата с ограниченной тягой // *Косм. исслед.* 2023. Т. 61. № 3. С. 248–257. <https://doi.org/10.31857/S0023420622600155>
10. *Красильщиков М.Н., Малышев В.В., Федотов А.В.* Автономная реализация динамических операций на геостационарной орбите. I. Формализация задачи управления // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2015. № 6. С. 82–96.
11. *Войсковский А.П., Красильщиков М.Н., Малышев В.В. и др.* Автономная реализация динамических операций на геостационарной орбите. II. Синтез алгоритмов управления // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2016. № 6. С. 107–128.
12. *Аппазов Р.Ф., Сытин О.Г.* Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 440 с.
13. *Константинов М.С.* Механика космического полета. М.: Наука, 1989.
14. *Эльясберг П.Е.* Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1969.
15. *Ишков С.А.* Сближение космических аппаратов с малой тягой на околоспутниковых орбитах // *Косм. исслед.* 1992. Т. 30. № 2. С. 165–179.
16. *Понtryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.B. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.

PARETO-OPTIMAL PARAMETRIC PROGRAMS FOR SPACECRAFT RELATIVE MOTION CONTROL AT NEAR CIRCULAR ORBITS

© 2025 S. A. Ishkov, G. A. Filippov*

Samara University, Samara, Russia

*e-mail: filippov.ga@ssau.ru

The problem of designing a set of nominal Pareto optimal control programs for the relative motion of a spacecraft maneuvering in circular orbits relative to a passive target is considered. Motion is considered in an orbital cylindrical reference frame in variables characterizing secular and periodic motion in a dimensionless form, invariant with respect to the magnitude of acceleration from the thrust of a maneuvering spacecraft and the height of the reference orbit. On the basis of analytical studies, areas of boundary conditions have been constructed that allow the use of simpler relative motion control programs with two active areas oriented in the transversal direction. The solution of a two-criterion parametric problem for the criteria is obtained: the motor operating time of the engine, and the total duration of the maneuver. The application of the Pareto optimality principle made it possible to simplify the numerical procedure for constructing the desired set of non-improved solutions to the problem from the available sample satisfying the boundary conditions of the transfer.