

УДК 629.78

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ОЦЕНКА НАИХУДШЕЙ ТОЧНОСТИ ОРИЕНТАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

© 2025 г. А. С. Дробышева¹, С. С. Ткачев^{2,*}

¹Институт космических исследований РАН, Москва, Россия

²Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

*e-mail: stevens_L@mail.ru

Поступила в редакцию 19.11.2024 г.

После доработки 20.11.2024 г.

Принята к публикации 24.11.2024 г.

В работе рассматривается угловое движение космического аппарата под воздействием различных возмущающих факторов. Предлагается методика исследования пространства возмущающих параметров для оценки вероятности попадания точности ориентации в некоторый интервал, а также выявления наихудшей точности и соответствующих ей возмущающих параметров. Для анализа структуры всего множества возмущающих параметров используется способ получения статистического ансамбля и дальнейшей интерпретации данных. Наихудшее значение точности ориентации ищется с помощью метода роя частиц, в котором учитываются ограничения на возмущающие параметры. Приведен численный пример анализа точности ориентации в режиме орбитальной стабилизации обоими способами.

DOI: 10.31857/S0023420625040066, EDN: QNMACE

1. ВВЕДЕНИЕ

При проектировании миссий малых космических аппаратов (КА) одним из важных этапов является численное моделирование с учетом внешних возмущений. Результаты, однако, дают представление о движении КА лишь с некоторой степенью достоверности, так как математическая модель не может учесть всех возмущающих воздействий. Это происходит как из-за невозможности записать “идеально” точную модель взаимодействия КА и факторов внешней среды, так и из-за неточного знания параметров, которые являются важной составляющей выбранных моделей. Например, при движении КА на низких околоземных орбитах плотность атмосферы, которая определяет силу и момент аэродинамического сопротивления, изменяется, как правило, в довольно большом диапазоне (различие может составлять более 50 %). При этом совершенно не очевидно, что наиболее удаленные от номинальных параметров возмущающих моментов в совокупности дадут самый худший результат по точности ориентации КА (совокупность таких параметров далее будем называть *границей* рассматриваемого пространства возмущающих

параметров, остальные значения — *внутренней областью*). Возможна ситуация, когда максимальные моменты внешних сил скомпенсируют друг друга и точность ориентации улучшится по сравнению с более близкими к номинальным значениям. Таким образом, необходимо оценивать точность ориентации (или стабилизации, в зависимости от постановки задачи) на всем пространстве параметров, которые вносят ошибку в точность ориентации.

При анализе влияния возмущений требуется как получение представления обо всех допустимых значениях для заданного пространства возмущающих параметров, так и информация о худшем значении точности ориентации. В работе [1] приведено описание факторов, которые влияют на точность ориентации космического корабля, а также представлены результаты точности ориентации для различных миссий КА в режимах трехосной стабилизации и при стабилизации вращением. Также включен дополнительный раздел, содержащий результаты теоретических расчетов. Подобные исследования проводятся не только по результатам миссий, но чаще при их планировании [2–7], а также во

время полета [8, 9]. При планировании миссии важно оценить возможности системы ориентации, а также оценить вероятность достижения желаемой точности ориентации и стабилизации [10], так как игнорирование некоторых возмущающих факторов может привести к необратимым последствиям выполнения задач миссии, которые в свою очередь приведут к большим финансовым и времененным потерям.

В настоящей статье рассматривается задача анализа области возмущающих параметров на предмет установления наихудших значений параметров, дающих наибольшее отклонение точности относительной ориентации от номинального режима, а также набирается статистика для оценки вероятности получить желаемую точность ориентации.

В работе приводятся уравнения движения КА и строится идеальное управление для решения целевой задачи. Затем обсуждаются различные возмущающие факторы, приводящие к ошибкам ориентации, а также способы анализа пространства возмущающих параметров для выявления тех из них, которые приводят к максимальному отличию ориентации КА от целевой ориентации: получение статистического ансамбля с дальнейшей интерпретацией полученных результатов [11, 12] и метод глобальной оптимизации — метод роя частиц [13]. Первый способ позволяет набрать статистические данные о распределении ошибок ориентации на всем исследуемом пространстве возмущающих параметров и оценить вероятность достижения определенных значений точности, а второй — найти наихудшую комбинацию возмущающих параметров и соответствующую ей ошибку ориентации. На примере продемонстрирован способ анализа области возмущающих параметров в режиме орбитальной стабилизации КА с использованием обоих подходов.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача поиска наихудшей точности ориентации при движении КА по околосолнечной орбите и определения возмущающих параметров, соответствующих ей, а также анализ пространства возмущающих параметров для выявления вероятности достижений различных значений точности относительной ориентации.

Предполагается, что КА находится в режиме трехосной ориентации, реализуя при этом заданный режим углового движения для выполнения целевых задач определенной миссии. Управление

угловым движением КА осуществляется системой управления ориентацией, установленной на борту аппарата. Это может быть как маховицкая система, так и магнитная в некоторых специальных задачах. Управление должно обеспечивать отслеживание космическим аппаратом целевого режима, который определяется углами ориентации с заданными граничными условиями.

3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Для описания движения КА в режиме трехосной ориентации вводятся следующие системы координат:

1. $O_E Z_1 Z_2 Z_3$ — инерциальная система координат J2000 (ИСК) с центром в центре масс Земли O_E , ось $O_E Z_3$ совпадает с осью вращения Земли (направлена по вектору угловой скорости), ось $O_E Z_1$ направлена в точку весеннего равноденствия эпохи 2000.0, а ось $O_E Z_2$ дополняет систему до правой тройки.

2. $Ox_1 x_2 x_3$ — связанная с КА система координат (ССК), оси которой суть главные центральные оси инерции КА, а центр совпадает с центром масс КА.

Система дифференциальных уравнений, задающая орбитальное и угловое движение КА:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{F}_{J2}}{m} + \frac{\mathbf{F}_{\text{атм}}}{m}, \\ \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{абс}} = -\boldsymbol{\omega}_{\text{абс}} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{\text{абс}} + \mathbf{M}_{\text{грав}} + \\ + \mathbf{M}_{\text{атм}} + \mathbf{M}_{\text{возм}} + \mathbf{M}_{\text{упр}}, \\ \dot{\mathbf{A}} = -[\boldsymbol{\omega}_{\text{абс}}] \times \mathbf{A}, \end{cases} \quad (1)$$

где \mathbf{r} и \mathbf{v} — радиус-вектор и скорость центра масс КА соответственно, μ — гравитационный параметр Земли, \mathbf{F}_{J2} — возмущение от второй гармоники геопотенциала, $\mathbf{F}_{\text{атм}}$ — сила аэродинамического сопротивления, m — масса КА, $\boldsymbol{\omega}_{\text{абс}}$ — абсолютная угловая скорость КА, \mathbf{A} — матрица перехода из ИСК в ССК (переводит вектор $\mathbf{r}_{\text{ИСК}}$, заданный в ИСК, в вектор в ССК $\mathbf{r}_{\text{ССК}}$ следующим образом: $\mathbf{r}_{\text{ССК}} = \mathbf{A} \mathbf{r}_{\text{ИСК}}$), \mathbf{J} — тензор инерции КА, $\mathbf{M}_{\text{грав}}$ — гравитационный момент (ньютоновское центральное гравитационное поле), $\mathbf{M}_{\text{атм}}$ — аэродинамический момент (используется диффузно-зеркальная модель [14]), $\mathbf{M}_{\text{возм}}$ — внешние возмущающие моменты случайной природы, $\mathbf{M}_{\text{упр}}$ — управляющий момент.

Обозначение $[\omega_{abc}]_{\times}$ здесь и далее задает матрицу векторного произведения, составленную из компонент соответствующего вектора, в данном случае вектора абсолютной угловой скорости КА $\omega_{abc} = (\omega_{abc,1}, \omega_{abc,2}, \omega_{abc,3})^T$:

$$[\omega_{abc}]_{\times} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{abc,3} & \omega_{abc,2} \\ \omega_{abc,3} & 0 & -\omega_{abc,1} \\ -\omega_{abc,2} & \omega_{abc,1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

4. ЦЕЛЕВОЙ РЕЖИМ

Рассмотрим в общем виде задачу обеспечения трехосной ориентации КА. Введем целевую систему координат $OX_1X_2X_3$ (ЦСК). ЦСК определяется заданным угловым режимом движения, в котором необходимо стабилизировать аппарат. Обозначим соответствующие матрицы перехода:

$$\text{ИСК} \xrightarrow{\mathbf{A}} \text{ССК}, \quad \text{ЦСК} \xrightarrow{\mathbf{D}} \text{ССК}, \quad \text{ИСК} \xrightarrow{\mathbf{G} = \mathbf{D}^T \mathbf{A}} \text{ЦСК}.$$

Положение ССК относительно ЦСК задается углами относительной ориентации α, β, γ (последовательность поворотов 2-3-1, рис. 1). Тогда матрица перехода \mathbf{D} имеет вид

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma \\ \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Пусть ω_0 — угловая скорость ЦСК относительно ИСК, заданная в проекциях на оси ЦСК, $\omega_{\text{отн}}$ — угловая скорость ССК относительно ЦСК, \mathbf{D} — матрица перехода из ЦСК в ССК. Тогда абсолютная угловая скорость КА (угловая скорость ССК относительно ИСК) есть

$$\omega_{abc} = \mathbf{D}\omega_0 + \omega_{\text{отн}}. \quad (4)$$

Задача управления — совместить оси связанный с КА системы координат с целевой (рис. 2). Формально это записывается следующим образом: $\mathbf{D} = \mathbf{E}$, $\omega_{\text{отн}} = (0, 0, 0)^T$, и тогда $\mathbf{G} = \mathbf{A}$, $\omega_{abc} = \omega_0$.

5. УПРАВЛЯЮЩИЙ МОМЕНТ

Модельное управление, требуемое для обеспечения трехосной ориентации в заданном положении, строится с использованием функции Ляпунова [15–17].

Производная абсолютной угловой скорости (4)

$$\dot{\omega}_{abc} = \mathbf{D}\dot{\omega}_0 + \mathbf{D}\dot{\omega}_{\text{отн}} + \dot{\omega}_{\text{отн}}. \quad (5)$$

Тогда уравнения относительного углового движения в невозмущенном случае ($\mathbf{M}_{\text{возд}} = 0$) с учетом (1) и (5) представимы в виде:

$$\begin{cases} \mathbf{J}\dot{\omega}_{\text{отн}} = -\omega_{abc} \times \mathbf{J}\omega_{abc} + \\ + \mathbf{J}(\omega_{\text{отн}} \times \mathbf{D}\omega_0) - \mathbf{J}\mathbf{D}\dot{\omega}_0 + \\ + \mathbf{M}_{\text{грав}} + \mathbf{M}_{\text{атм}} + \mathbf{M}_{\text{упр}}, \\ \dot{\mathbf{D}} = -[\omega_{\text{отн}}]_{\times} \mathbf{D}. \end{cases} \quad (6)$$

Уравнения орбитального движения в невозмущенном случае описывают движение КА по круговой орбите и могут быть разрешены независимо, поэтому система дифференциальных уравнений (6) учитывает только угловое движение КА.

На основе исследования [17] кандидат-функция Ляпунова выбирается в виде

$$V = \frac{1}{2} \omega_{\text{отн}}^T \mathbf{J} \omega_{\text{отн}} + k_d ((1 - d_{11}) + (1 - d_{22}) + (1 - d_{33})),$$

$$k_d = \text{const} > 0,$$

где d_{ij} — компоненты матрицы \mathbf{D} , k_d — положительный скалярный параметр, $[k_d] = [\text{Н} \cdot \text{м}]$.

Для асимптотической устойчивости в этом случае по теореме Барбашина — Красовского [18] достаточно обеспечить неположительность производной функции Ляпунова в силу уравнений движения (6)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \omega_{\text{отн}}^T \mathbf{J} \dot{\omega}_{\text{отн}} - \\ &- k_d (\omega_{\text{отн},3} (d_{21} - d_{12}) + \omega_{\text{отн},2} (d_{13} - d_{31}) + \\ &+ \omega_{\text{отн},1} (d_{32} - d_{23})) = \omega_{\text{отн}}^T (\mathbf{J} \dot{\omega}_{\text{отн}} + k_d \mathbf{S}_d) = \\ &= \omega_{\text{отн}}^T \left(-\omega_{abc} \times \mathbf{J}\omega_{abc} + \mathbf{J}(\omega_{\text{отн}} \times \mathbf{D}\omega_0) - \right. \\ &\left. - \mathbf{J}\mathbf{D}\dot{\omega}_0 + \mathbf{M}_{\text{грав}} + \mathbf{M}_{\text{атм}} + \mathbf{M}_{\text{упр}} + k_d \mathbf{S}_d \right) \leq 0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{S}_d = (d_{23} - d_{32}, d_{31} - d_{13}, d_{12} - d_{21})^T$. Введем положительный скалярный параметр $k_{\omega} = \text{const} > 0$ так, чтобы:

$$\dot{V} = \omega_{\text{отн}}^T (-k_{\omega} \omega_{\text{отн}}) \leq 0.$$

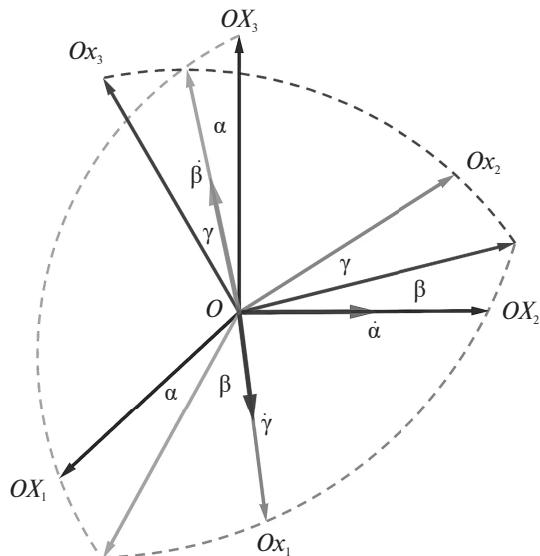


Рис. 1. Углы ориентации, последовательность поворотов 2-3-1

Тогда получаем выражение для модельного управляющего момента

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{упр}} = & -k_{\omega}\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}} - k_d\mathbf{S}_d + \boldsymbol{\omega}_{\text{абс}} \times \\ & \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{\text{абс}} - \mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}} \times \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}_0) + \mathbf{J}\mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 - \\ & - \mathbf{M}_{\text{прав}} - \mathbf{M}_{\text{атм}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Динамические уравнения относительного движения в этом случае принимают вид

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{отн}} = -k_{\omega}\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}} - k_d\mathbf{S}_d. \quad (8)$$

Таким образом, выбрав в качестве коэффициентов управления k_{ω} и k_d произвольные положительные константы, можно обеспечить асимптотическую устойчивость относительного положения равновесия ($\mathbf{D} = \mathbf{E}$, $\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}} = (0, 0, 0)^T$).

6. ПРОБЛЕМЫ РЕАЛИЗАЦИИ ЦЕЛЕВОГО РЕЖИМА

Идеальное управление (7) может быть реализовано с помощью различных систем управления ориентацией. Однако из-за внешних возмущающих факторов возникают ошибки ориентации и стабилизации. Все возмущения можно разбить условно на три категории:

1) ошибки расчета и реализации управляющего момента, возникающие из-за неточности знания параметров системы (тензор инерции, положение центра масс), а также неточностей

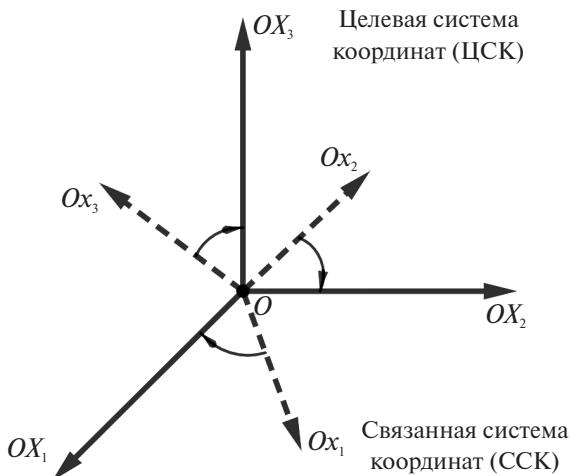


Рис. 2. Целевая и связанная системы координат

при установки системы управления ориентацией и других компонентов аппарата [19];

2) ошибки определения вектора состояния, возникающие из-за погрешностей работы датчиков [20, 21];

3) ошибки моделей внешней среды [21].

Каждая система управления ориентацией КА имеет свои недостатки, с которыми в отдельных случаях удается справиться, а в других случаях применить в свою пользу. Магнитные системы (МСО) в целом менее предпочтительны в задачах обеспечения точной ориентации, так как из-за невозможности реализовать управляющий момент вдоль вектора геомагнитной индукции, ошибка ориентации составляет $10-15^\circ$, что подтверждается рядом исследований и летными испытаниями [7, 22, 23]. Однако в задачах, где нет необходимости в высокой точности ориентации, использование магнитных катушек позволяет удешевить производство КА и упростить разработку программного обеспечения, что, безусловно, является плюсом. Если необходимо реализовать и поддерживать режим движения такой, что проекция идеального управляющего момента (7) на вектор геомагнитной индукции \mathbf{B} равна 0, то катушки в теории можно применять [24]. На практике все усложняется тем, что наличие возмущений может потребовать создания момента вдоль вектора \mathbf{B} .

С другой стороны, маховичная система способна обеспечить высокую точность ориентации даже при наличии больших внешних возмущающих моментов, однако она более дорогая и сложная в эксплуатации. Кроме того, в случае малых КА балансировка маховиков перед установкой

обычно не проводится, и зачастую это приводит к ошибке реализации управления [25, 26].

Независимо от выбора системы управления ориентацией ошибки, обусловленные влиянием внешней среды и неточным знанием некоторых параметров КА, вносят также вклад в ошибку ориентации. Основными источниками ошибок можно считать плотность атмосферы и неточность знания тензора инерции аппарата. Для малых КА тензор инерции определяется, в основном, численно на этапе проектирования конструкции аппарата при помощи специального программного обеспечения. В реальности же при сборке возможны погрешности в установке оборудования и реальный тензор инерции почти всегда отличается от расчетного.

7. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВА ВОЗМУЩАЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ

При проектировании миссий возникает необходимость оценки точности ориентации, наихудшего ее значения, а также оценки границ диапазона изменения точности ориентации в зависимости от возмущающих параметров.

В некоторых миссиях необходимо оценить точность ориентации на всем интервале движения в среднем, найти наихудшую и наилучшую точности, а также получить статистическую информацию о том, в каком диапазоне находится 50 % результатов, есть ли “выбросы” — случайные очень большие или маленькие отклонения от медианного значения, или значения равномерно распределены. Для такой качественно-количественной оценки используется метод получения статистического ансамбля и дальнейшей его интерпретации. Интерпретировать можно следующими способами в зависимости от постановки задачи [11, 12]:

1. *Ансамблевая интерпретация*: с вероятностью p существуют такие члены ансамбля, которые на всем рассматриваемом временном промежутке не превышают ξ . Членом ансамбля называется одно из оцениваемых возможных состояний рассматриваемой системы.

2. *Временная интерпретация*: с вероятностью p все члены ансамбля оцениваемой величины в течение некоторого промежутка времени не превышают ξ .

3. *Смешанная интерпретация*: для случайного члена ансамбля в случайный момент времени вероятность того, что он не будет превышать ξ , составляет p .

Статистический ансамбль можно получить методом перебора по заданным значениям возмущающих параметров, однако задать их можно по-разному, от чего будет зависеть результат. В случае, когда известно, что возмущающие параметры могут принимать значения из некоторого заданного диапазона, но неизвестна плотность распределения вероятности в этом диапазоне, предпочтительнее использовать равномерно распределенные случайные величины для моделирования случайного процесса [11, 12].

Объем выборки, который необходимо задать для получения статистически значимого результата можно получить следующим способом. Пусть X_1, \dots, X_n — независимые случайные величины, для которых выполнено $0 \leq X_i \leq 1$ ($i = 1, n$) с вероятностью 1. Тогда для среднего выборочного $\bar{X} = (1/n) \sum_{i=1}^n X_i$ справедлива оценка (неравенство Хефдинга, [27]):

$$P(|\bar{X} - E\bar{X}| \geq \varepsilon) \leq 2 \exp(-2\varepsilon^2 n), \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (9)$$

при этом, если случайные величины одинаково распределены и математическое ожидание $E\bar{X}_i = \mu$, $i = 1, n$, то неравенство (9) перепишется в виде

$$P(|\bar{X} - \mu| \geq \varepsilon) \leq 2 \exp(-2\varepsilon^2 n), \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (10)$$

Это неравенство означает, что при проведении n независимых экспериментов вероятность отклонения среднего выборочного от истинного математического ожидания μ более чем на ε не превзойдет $P = 2 \exp(-2\varepsilon^2 n)$. Величину ε можно назвать точностью определения математического ожидания случайной величины, а $1 - P$ называется уровнем доверия.

Тогда, задав значения ε и P , получим объем выборки:

$$n = \frac{1}{2\varepsilon^2} \ln\left(\frac{2}{P}\right). \quad (11)$$

Более сильное свойство — неравенство Дворецкого — Кифера — Вольфовича [28] оценивает разность между фактической и эмпирической функциями распределения случайной величины

$$P\left(\sup_{x \in \mathbb{R}} (F_n(x) - F(x)) > \varepsilon\right) \leq 2 \exp(-2\varepsilon^2 n), \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (12)$$

где $F(x)$ — истинная функция распределения, $F_n(x)$ — эмпирическая функция распределения. Заметим, что при использовании обоих неравенств для получения величины объема выборки

не требуется знание истинных математического ожидания и функции распределения случайной величины. Объем выборки, вычисленный с помощью неравенства (12), получается таким же — (11).

С другой стороны, существуют примеры миссий, для которых необходимо гарантировать попадание в заданный интервал по точности. Например, для изучения процессов, происходящих на Солнце, с помощью солнечного телескопа, нужно обеспечить совпадение оптической оси с направлением на Солнце с точностью до нескольких угловых минут [29]. При этом возможна ситуация, когда некоторое сочетание параметров приведет к недостижимости требуемой точности, что отрицательно скажется на решении целевой задачи миссии. В некоторых случаях такие значения могут оказаться на границе рассматриваемой области возмущенных параметров, однако установить этот факт достоверно без анализа внутренней области зачастую невозможно, так как зависимость точности ориентации от возмущающих параметров не известна и довольно сложна. Таким образом, необходимо проанализировать как границу, так и внутренность пространства возмущающих параметров. Статистический ансамбль в этом случае даст только вероятность, с которой целевая задача будет решена.

Для поиска наихудшей комбинации параметров на всей области возмущенных параметров целесообразно использовать неградиентные методы глобальной оптимизации — для примера в настоящей работе используется метод роя частиц (Particle Swarm Optimization, PSO, [30]). Метод роя позволяет найти глобальный оптимум в задачах, где целевая функция не может быть представлена в аналитическом виде и не дифференцируема, что соответствует задаче — в качестве целевой функции используется максимальное значение точности относительной ориентации, полученное при численном моделировании движения КА.

Рой — это совокупность некоторого количества элементов, называемых частицами. Движение роя (всех его частиц) задано на некоторой области поиска (пространство параметров задачи), границы которой определяются исходя из ограничений на искомые параметры, вытекающих из условий и требований решаемой задачи. Положение частицы — это вектор параметров на пространстве поиска.

Для роя ставится задача обеспечить минимум целевой функции

$$\Phi(\mathbf{x}_p) \underset{\mathbb{U}}{\rightarrow} \min,$$

где \mathbf{x}_p — вектор параметров (точка в пространстве возмущающих параметров), который задает текущее положение p -й частицы. Пространство поиска \mathbb{U} определяет ограничения на величины параметров оптимизации.

Для нахождения наилучшего положения \mathbf{x}_{best} отводится некоторое число итераций N . Решение о том, какое положение занять на следующей итерации, каждая частица принимает на основе своего положения на текущей итерации $\mathbf{x}_p(i)$ и величины смещения $\Delta\mathbf{x}_p(i)$ по следующему закону

$$\mathbf{x}_p(i+1) = \mathbf{x}_p(i) + \Delta\mathbf{x}_p(i), \quad (13)$$

где смещение определяется формулой:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{x}_p(i) = & c_{in} \Delta\mathbf{x}_p(i-1) + c_{cog} [\mathbf{x}_{p,best}(i) - \mathbf{x}_p(i)] + \\ & + c_{soc} [\mathbf{x}_{best}(i) - \mathbf{x}_p(i)]. \end{aligned} \quad (14)$$

Первое слагаемое в выражении (14) называется *инерционная компонента* (отвечает за стремление p -й частицы продолжить движение в направлении, которое было на предыдущей итерации), второе — *когнитивная компонента* (стремление к собственному лучшему среди найденных за предыдущие i итераций положению $\mathbf{x}_{p,best}(i)$), и третье — *социальная компонента* (стремление к лучшему положению $\mathbf{x}_{best}(i)$ всего роя, найденному за предыдущие i итераций). Вклад каждой компоненты определяется с помощью соответствующих весовых коэффициентов c_{in} , c_{cog} , c_{soc} (инерциального, когнитивного и социального). Эффективность метода существенно зависит от выбора весовых коэффициентов [31]. Коэффициенты подбираются таким образом, чтобы в начале поиска частицы исследовали \mathbb{U} независимо, а со временем (с течением итераций) они начинали все больше принимать во внимание полученные соседями результаты, все меньше исследуя новые области в \mathbb{U} самостоятельно и все больше изучая окрестности собственного и соседних лучших положений, а затем, к концу поиска, все частицы переходят к изучению окрестности общего лучшего положения. При этом для обеспечения сходимости метода роя следует обеспечить условие [32]:

$$c_{in} > \frac{1}{2}(c_{soc} + c_{cog}) - 1.$$

Критерием остановки поиска является условие малости величины изменения целевой функции в течение заданного количества итераций

подряд (отношения разницы текущего и предыдущего лучших значений целевой функции к текущему значению) и попадание всех частиц в некоторую заранее заданную окрестность найденного лучшего положения.

Количество частиц и итераций подбираются исходя из конкретной задачи в зависимости от количества оптимизационных параметров, вида целевой функции, вычислительной сложности, а также структуры области поиска.

8. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим задачу обеспечения трехосной орбитальной ориентации КА с помощью магнитной системы управления ориентацией. Целевой системой (ЦСК) является орбитальная система координат (ОрбСК), которая вводится следующим образом:

- ось OX_3 направлена вдоль радиус-вектора КА,
- ось OX_2 совпадает с нормалью к орбите спутника,
- ось OX_1 дополняет систему до правой тройки.

Так как с помощью МСО невозможно выдавать управление вдоль вектора геомагнитной индукции, возникает проблема локальной неуправляемости. В работах [33, 34] для обхода ограничения направления управляемого магнитного момента и повышения точности ориентации предлагается алгоритм построения в окрестности целевой (орбитальной) ориентации специального опорного углового движения (здающего опорную систему координат, ОпСК), на котором проекция управляемого момента на вектор геомагнитной индукции минимальна. Поддержание опорного движения, в том числе компенсация возмущений, требует определенного управляемого момента в зависимости от положения спутника на орбите, его ориентации и момента времени. Правильным образом выбранное опорное движение может обеспечить относительно небольшую компоненту управляемого момента вдоль вектора геомагнитной индукции, что позволит поддерживать этот режим ориентации с помощью только МСО с достаточно хорошей точностью. Стабилизация спутника на опорном движении реализуется с помощью управления на основе функции Ляпунова, обеспечивающего асимптотическую устойчивость. Поиск оптимальных параметров опорного движения и оптимальных в некотором смысле коэффициентов усиления управления осуществлен с помощью метода роя частиц.

Опорное движение ищется, согласно [33], в виде

$$\begin{aligned}\alpha_{\text{опорн}} &= a_1 \sin u + a_2 \cos u + a_3 \sin 2u + a_4 \cos 2u, \\ \beta_{\text{опорн}} &= b_1 \sin u + b_2 \cos u + b_3 \sin 2u + b_4 \cos 2u, \\ \gamma_{\text{опорн}} &= g_1 \sin u + g_2 \cos u + g_3 \sin 2u + g_4 \cos 2u,\end{aligned}\quad (15)$$

где a_k, b_k, g_k ($k = \overline{1, 4}$) — коэффициенты опорного движения, $u = \omega_{\text{орб}} t$ — аргумент широты, $\omega_{\text{орб}}$ — орбитальная угловая скорость. Введем \mathbf{C} — матрицу перехода из ОрбСК в ОпСК, задаваемую углами (15) (последовательность поворотов 2-3-1) и \mathbf{D} — из ОпСК в ССК. Управление в этом случае должно совместить оси ОпСК и ССК. В свою очередь ОпСК по построению близка к целевой системе координат — ОрбСК. Управляющий момент по аналогии с (7) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{\text{упр}} &= -k_{\omega} \boldsymbol{\omega}_{\text{отн}} - k_d \mathbf{S}_d + \boldsymbol{\omega}_{\text{абс}} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{\text{абс}} - \\ &- \mathbf{J} (\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}} \times \mathbf{DC} (\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{\text{опорн}})) - \\ &- \mathbf{JD} (\mathbf{C} \boldsymbol{\omega}_{\text{опорн}} \times \mathbf{C} (\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{\text{опорн}})) + \\ &+ \mathbf{JDC} (\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{опорн}}) - \mathbf{M}_{\text{грав}} - \mathbf{M}_{\text{атм}},\end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\omega}_{\text{опорн}}$ — угловая скорость ОпСК относительно ОрбСК, заданная в проекциях на оси ОрбСК, $\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}}$ — угловая скорость ССК относительно ОпСК.

Параметры опорного движения ищутся с помощью метода роя, для которого ставится задача нелинейной оптимизации с целевой функцией

$$\Phi = \max_i \left\| \frac{\mathbf{C}(t_i) \mathbf{B}(t_i)}{B(t_i)} \left(\frac{(\mathbf{C}(t_i) \mathbf{B}(t_i))^T \mathbf{M}_{\text{упр}}(t_i)}{B(t_i)} \right) \right\|_2 \rightarrow \min, \quad t_i \in [0, T_{\text{орб}}], \quad (16)$$

$$\mathbb{U} = \left\{ a_k, b_k, g_k \in [-5^\circ, 5^\circ], k = \overline{1, 4} \right\},$$

где $T_{\text{орб}}$ — орбитальный период, \mathbf{B} — вектор геомагнитной индукции. Предложенная целевая функция обеспечивает минимум отличия магнитного управляемого момента от идеального [35]:

$$\delta \mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{упр}} - \mathbf{M}_{\text{магн}} = \frac{\mathbf{CB}}{B} \left(\frac{\mathbf{CB}^T}{B}, \mathbf{M}_{\text{упр}} \right).$$

Далее, также методом роя, решается задача поиска оптимальных коэффициентов управления k_d , k_ω , обеспечивающих асимптотическую устойчивость. Целевая функция, согласно [35], имеет вид:

$$\Phi^{gains} = \max_i (\|\lambda_i\|) \rightarrow \min, \quad i = \overline{1, 6},$$

$$\mathbb{U} = \left\{ \begin{array}{l} k_\omega \in (5 \cdot 10^{-5}, 10^{-2}) \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с} \\ k_d \in (10^{-8}, 5 \cdot 10^{-5}) \text{ Н} \cdot \text{м} \end{array} \right\}, \quad (17)$$

где λ_i — собственные значения матрицы монодромии. Рассматриваются только пары коэффициентов, для которых выполняется условие $|\lambda_i| < 1$. Пространство поиска \mathbb{U} задается исходя из результатов, полученных в работе [17].

Найденное опорное движение с параметрами, приведенными в табл. 1 изображено на рис. 3. В невозмущенном случае углы относительной ориентации представлены на рис. 4. Разница идеального и магнитного управления — рис. 5.

Рисунки 3–5 показывают, что ошибка реализации управления (рис. 5) приводит к ошибке ориентации 8° (рис. 4), в то время как опорное угловое движение (рис. 3) найдено с достаточно хорошей точностью для случая реализации с помощью магнитной системы. В данном примере другие ошибки не рассматривались, то есть возмущением являлось только отличие требуемого

управляющего момента от реализованного магнитными катушками.

Однако задача обладает заметной чувствительностью к точности знания модели внешней среды и ее параметров, так как они используются для построения опорного движения. К возмущениям тут относятся неточность знания модели геомагнитного поля, отличие тензора инерции от его расчетных значений и ошибки знания взаимодействия КА с атмосферой Земли. Эти ошибки принципиально неустранимы и вносят вклад в точность итоговой ориентации КА. Таким образом, необходимо получить информацию о зависимости относительной точности ориентации от возмущающих параметров.

Возмущенный тензор инерции зададим следующим образом

$$\mathbf{J}_{\text{возм}} = \delta \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J} \cdot \delta \mathbf{J},$$

где \mathbf{J} — невозмущенный тензор инерции КА, $\delta \mathbf{J} = \|\delta J_{ij}\|$ — матрица возмущений следующего вида

$$\delta \mathbf{J} = \delta \mathbf{J}^{\text{диаг}} \delta \mathbf{J}^{\text{поворот}},$$

где $\delta \mathbf{J}^{\text{диаг}} = \|\delta J_{ii}^{\text{диаг}}\|$, $i = \overline{1, 3}$ — диагональная матрица, задающая отличие величин главных моментов (до $\pm 5\%$ по каждой компоненте), $\delta \mathbf{J}^{\text{поворот}}$ —

Таблица 1. Параметры задачи

Высота круговой орбиты	545.7635 км
Наклонение	$i = 97.7125^\circ$
Долгота восходящего узла	$\Omega = 141.5575^\circ$
Время моделирования	$6T_{\text{орб}} \approx 9.5$ ч
Форма КА	$10 \times 20 \times 30$ см (параллелепипед, 6U-кубсат)
Тензор инерции КА	$\mathbf{J} = \text{diag}(J_{11}, J_{22}, J_{33})$ $= \text{diag}(0.14, 0.125, 0.09) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$
Смещение центра масс	$\mathbf{c} = (0, 1, 0)$ см
Плотность атмосферы	$\rho_0 = 4.3 \cdot 10^{-13}$ кг/м ³
Ограничение на управление (дипольный момент)	$ m_i \leq 1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$, $i = \overline{1, 3}$
Модель магнитного поля Земли	“Косой” диполь (см. [35])
Гравитационное поле	Центральное

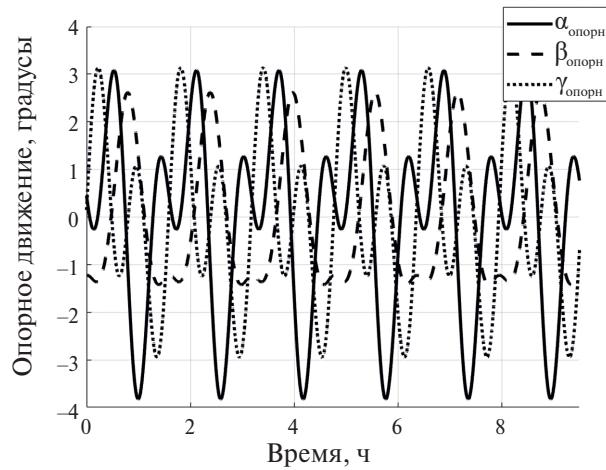


Рис. 3. Опорное движение (относительно ОрбСК)

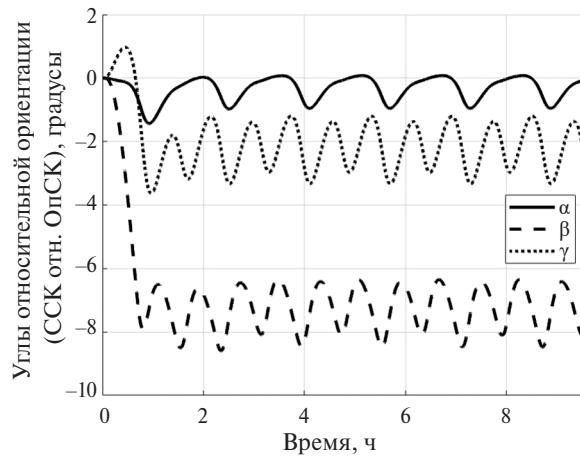
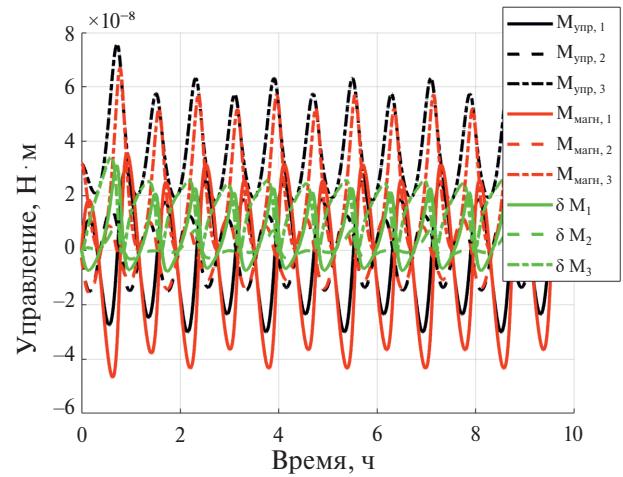


Рис. 4. Относительное движение (относительно ОпСК) в невозмущенном случае

матрица поворота, задающая отклонения главных осей инерции (максимальный угол в возмущенном и невозмущенном случаях составляет $\pm 5^\circ$), задается углами $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$, $\delta\varphi_3$, последовательность поворотов 2-3-1.

Для описания взаимодействия КА с атмосферой используется диффузно-зеркальная модель, предложенная в публикации [36] и рассмотренная в работе [14] для КА в форме параллелепипеда. Аэродинамический момент, действующий на КА, есть сумма моментов, действующих на грани КА, обращенные к набегающему потоку. На каждую грань действует соответствующий аэродинамический момент вида

$$\mathbf{M}_{aero} = \rho V_0^2 \left((1 - \varepsilon) \mathbf{I}_1 + 2\varepsilon \mathbf{I}_2 + (1 - \varepsilon) \frac{\mathbf{v}}{V_0} \mathbf{I}_3 \right), \quad (18)$$

Рис. 5. Идеальный управляющий момент \mathbf{M}_{upr} , магнитный момент \mathbf{M}_{mag} и разница между ними $\delta\mathbf{M} = \mathbf{M}_{upr} - \mathbf{M}_{mag}$

где ρ_0 — плотность атмосферы, V_0 — величина скорости набегающего потока, параметр модели $\varepsilon \approx 0.1$ отвечает за долю молекул воздуха, отраженных зеркально, и $v \approx 0.1V_0$ — параметр, пропорциональный наиболее вероятной тепловой скорости диффузно отраженных молекул. Выражения для величин \mathbf{I}_1 , \mathbf{I}_2 , \mathbf{I}_3 имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= (\mathbf{e}_{V_0}^T \mathbf{n}) \mathbf{r}_c \times \mathbf{e}_{V_0} \sigma, \quad \mathbf{I}_2 = \\ &= (\mathbf{e}_{V_0}^T \mathbf{n})^2 \mathbf{r}_c \times \mathbf{n} \sigma, \quad \mathbf{I}_3 = (\mathbf{e}_{V_0}^T \mathbf{n}) \mathbf{r}_c \times \mathbf{n} \sigma, \end{aligned} \quad (19)$$

где \mathbf{r}_c — радиус-вектор из центра масс КА в геометрический центр рассматриваемой грани КА, σ — площадь поверхности грани. Вклад в суммарный момент дают только грани, обращенные к набегающему потоку:

$$\mathbf{e}_{V_0}^T \mathbf{n} > 0,$$

где \mathbf{n} — вектор внешней нормали соответствующей грани, \mathbf{e}_{V_0} — единичный вектор скорости потока.

В используемой модели (18) основной вклад в ошибку ориентации (кроме ошибки, вызванной погрешностью реализации управления) вносит неточность знания значения плотности ориентации. Для численного моделирования предполагаем, что плотность известна с точностью $\pm 25\%$ от номинального ρ_0 , приведенного в табл. 1. Тогда плотность в возмущенном случае

$$\rho = \delta\rho \cdot \rho_0,$$

где $\delta\rho \in [0.75, 1.25]$ — коэффициент плотности.

В табл. 2 приведены параметры, которые используются в численном моделировании в возмущенном случае.

Так как наибольшее влияние на ошибку относительной ориентации оказывают неточности знания тензора инерции КА и плотности атмосферы, в работе рассматривается семимерное пространство возмущающих параметров

$$\delta J_{11}, \delta J_{22}, \delta J_{33}, \delta\varphi_1, \delta\varphi_2, \delta\varphi_3, \delta\rho. \quad (20)$$

Для начала проанализируем узловые точки границы пространства возмущающих параметров, которые соответствуют всевозможным комбинациям граничных значений параметров — всего $2^7 = 128$ вариантов. Результат (наихудшая точность ориентации и параметры, при которых она достигается) представлен в табл. 3.

Таблица 2. Параметры численного моделирования

Модель магнитного поля Земли	IGRF
Неточность знания плотности атмосферы	$0.75 \leq \delta\rho \leq 1.25$
Неточность знания тензора инерции КА	$-0.05 \leq \delta J_{ii} \leq 0.05, i = \overline{1,3}$ $-5^\circ \leq \delta\varphi_i \leq 5^\circ, i = \overline{1,3}$
Внешние неучтенные возмущения	$ \mathbf{M}_{\text{возм}} \in [-0.1 \cdot \mathbf{M}_{\text{грав}} , 0.1 \cdot \mathbf{M}_{\text{грав}}]$
Параметр для второй гармоники геопотенциала	$\varepsilon = 2.63326922072 \cdot 10^{25} \text{ м}^5/\text{с}^2$
Остаточный дипольный момент	$ m_i \in [-2 \cdot 10^{-5}, 2 \cdot 10^{-5}] \text{ А} \cdot \text{м}^2, i = \overline{1,3}$

Таблица 3. Наихудшие значения параметров, найденных в узловых точках границы

Максимальный угол отклонения, градусы	$\Psi = 41.26^\circ$
Коэффициент плотности	$\delta\rho = 1.25$
Углы отклонения главных осей инерции	$\varphi_1 = 5^\circ, \varphi_2 = -5^\circ, \varphi_3 = -5^\circ$
Отличие величин главных моментов	$\delta J_{11}^{\text{диаг}} = 0.05, \delta J_{22}^{\text{диаг}} = -0.05, \delta J_{33}^{\text{диаг}} = -0.05$
Матрица возмущений тензора $\delta\mathbf{J}$	$\begin{pmatrix} 1.0247 & -0.0016 & -0.0016 \\ 0.0015 & 0.9747 & -0.0013 \\ 0.0015 & 0.0015 & 0.9747 \end{pmatrix}$
Возмущенный тензор $\mathbf{J}_{\text{возм}}$	$\begin{pmatrix} 0.14699 & -0.00004 & -0.00009 \\ -0.00004 & 0.11874 & -0.00005 \\ -0.00009 & -0.00005 & 0.08550 \end{pmatrix}$

Так как точность относительной ориентации зависит от многих возмущающих факторов, и эту зависимость не предоставляет возможным записать в виде аналитической функции, то предположение о том, что худшая точность достигается при равенстве рассматриваемых параметров (20) одной из соответствующих границ (нижней или верхней) допустимого интервала, не является верным в общем случае. Таким образом, необходимо исследовать не только узловые точки границы, но и все границы рассматриваемого семимерного пространства (границей считаются такие точки, где хотя бы один параметр равен своему минимальному или максимальному значению, а другие принимают различные значения), а также внутреннюю область.

Для примера исследования точности ориентации на границах области рассмотрим под-

множество параметров с фиксированными значением коэффициента плотности $\delta\rho = 1.25$. Остальные возмущающие параметры задаются случайными равномерно распределенными величинами на соответствующих интервалах, заданных в табл. 2. Далее, для исследования всей внутренней области коэффициент плотность также задается равномерно распределенной случайной величиной на соответствующем интервале.

Согласно формуле (11), чтобы эмпирическая функция распределения случайной величины (точности относительной ориентации) отличалась от действительной функции распределения не более чем на 1 % (то есть $\epsilon = 0.01$) с вероятностью не меньше 99 % (то есть $1 - p = 0.99$) необходимо взять выборку, состоящую из $n = 26492$ значений (значений точности относительной ориентации полученной для различных наборов возмущающих параметров).

В обоих случаях (и с фиксированным коэффициентом плотности, и с произвольным) для различных возмущений тензора инерции КА и различных значений плотности атмосферы из заданных в табл. 2 диапазонов получен набор наихудших значений точности отслеживания опорного движения (углов ориентации ССК относительно ОпСК в установившемся режиме) на временном промежутке $T = 6T_{\text{оп}}\rho$:

$$\psi = \max \left(\max_{t \in [0, 6T_{\text{оп}}\rho]} (\alpha(t)), \max_{t \in [0, 6T_{\text{оп}}\rho]} (\beta(t)), \max_{t \in [0, 6T_{\text{оп}}\rho]} (\gamma(t)) \right).$$

Полученные значения для визуализации и отслеживания выбросов, медианных значений, а также определения интервала, содержащего 50 % от всех результатов, представляются в виде кубической диаграммы (*Box-plot*, “Ящик с усами”, [37]). На диаграмме на горизонтальной оси отмечен коэффициент плотности $\delta\rho$, на вертикальной оси отложены значения наибольших относительных углов отклонения от опорного движения для рассматриваемых возмущений тензора инерции в каждом случае. Прямоугольник (“ящик”) содержит 50 % от всех полученных результатов, горизонтальная линия — медианное значение (выше и ниже указанной линии лежат по 50 % результатов). Красные плюсочки — *выбросы* — значения вне “ящика”, составляющие также 50 % результатов. Полученные результаты приведены на рис. 6.

Более детально распределения наихудших точностей ориентации изображены в виде гистограмм на рис. 7. По горизонтальной оси отложены значения точности относительной ориентации.

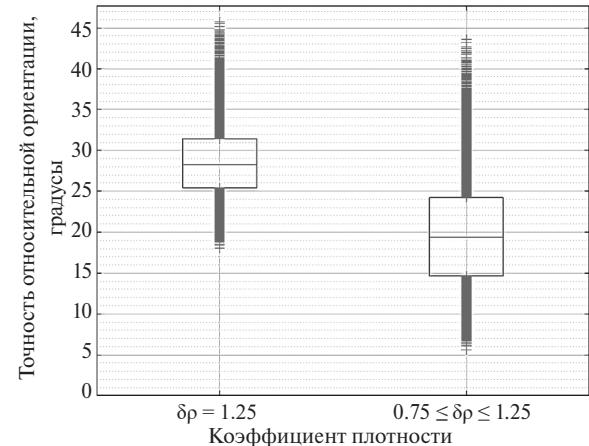


Рис. 6. “Ящики с усами” для визуализации распределения наихудших значений точности относительной ориентации для различных наборов возмущающих параметров

На вертикальной оси отложено количество точек, попавших в интервал $\Delta_i = [\psi_i, \psi_{i+1}]$, $|\Delta_i| = 0.5^\circ$. Разбивать на интервалы можно различными способами, от этого будет зависеть вид гистограммы, однако, выбор разбиения должен соотноситься с решаемой физической задачей. В данном случае разбиение на интервалы шириной полградуса дает представление о достигнутой точности ориентации (о вероятности получить значение точности ориентации в заданном диапазоне) с допустимой для рассматриваемой задачи погрешностью. Итак, вероятность того, что относительная точность ориентации попадает в диапазон $\psi_i \leq \psi \leq \psi_{i+1}$ равна $p = n_{\Delta_i} / n$, где n_{Δ_i} — число точек, попавших в диапазон Δ_i , n — общее число точек выборки. При этом каждая гистограмма дает верное представление о функции распределения точности ориентации с вероятностью 99 %. Если увеличить объем выборки, можно добиться более точных результатов, однако, так как на точность ориентации влияют не только ошибки знания тензора и плотности атмосферы, то добиваться более достоверных результатов не имеет смысла, т.к. компенсировать случайные возмущающие моменты все равно придется.

Из рис. 6 и 7 видно, что медианное значение относительной ориентации в случае с фиксированным постоянным коэффициентом плотности $\delta\rho = 1.25$ больше, чем для случая, когда коэффициент плотности меняется случайным образом для каждого набора параметров. Максимальное отклонение от опорного движения наблюдается

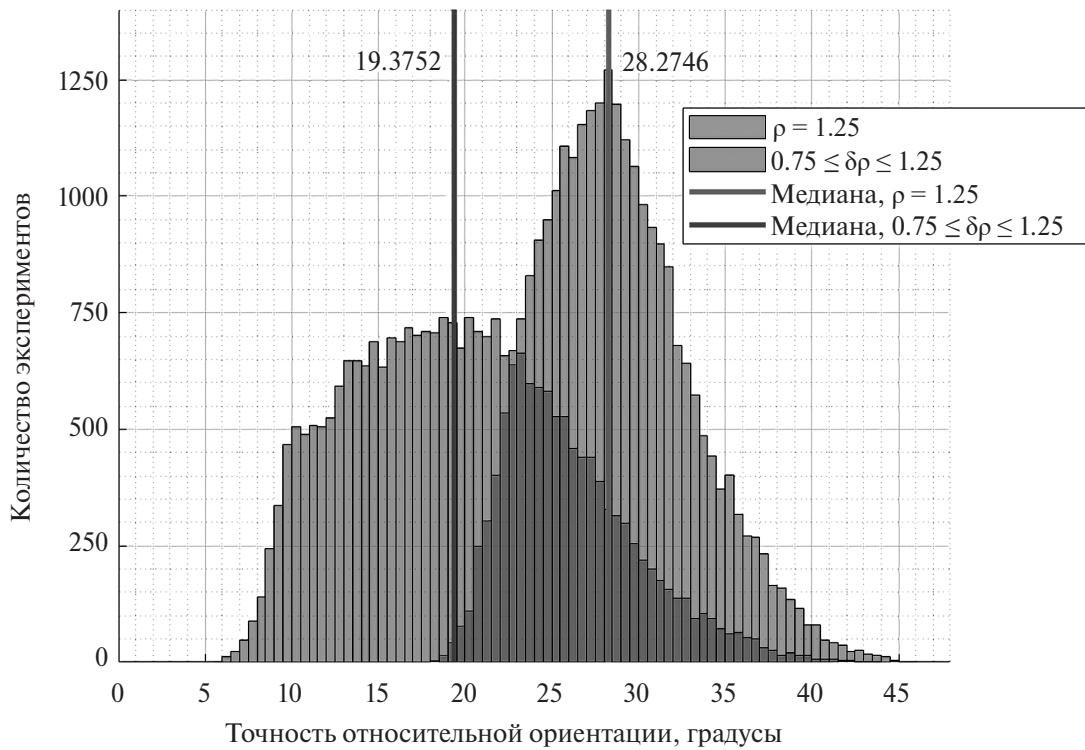


Рис. 7. Статистические ансамбли точности относительной ориентации для различных наборов возмущающих параметров

при максимальном коэффициенте плотности (граничное значение), но остальные параметры в этом случае находятся во внутренней области (табл. 4, второй столбец).

Для получения статистических ансамблей (с достоверностью 99 %) необходимо численно проинтегрировать движение КА более 20 тыс. раз, причем если есть необходимость посмотреть на результат, например, при другом значении коэффициента плотности, нужно дополнительно провести еще столько же испытаний.

Необходимо отметить, что статистические ансамбли дают лишь примерное представление о “выбросах”, то есть найти таким способом истинно минимальную или максимальную точности ориентации не получится. Для целенаправленного поиска этих величин используется метод глобальной оптимизации. Во всем рассматриваемом пространстве возмущающих параметров (табл. 2) с помощью метода роя частиц найдем наихудшее значение точности ориентации и соответствующие этому значению возмущающие параметры. Поставим задачу для метода роя (табл. 5). Целевая функция задачи — наихудшее (максимальное) отклонение

углов относительной ориентации на всем промежутке моделирования от положения относительного равновесия (точность относительной ориентации).

Найденные оптимальные параметры и соответствующие значения целевой функции (точность относительной ориентации) приведены в табл. 6 для двух случаев:

1) коэффициент плотности фиксирован и равен его максимальному значению, варьируются только 6 параметров, отвечающих за возмущение тензора инерции КА;

2) варьируются все 7 параметров — отвечающие как за возмущение тензора инерции КА, так и возмущение плотности атмосферы.

Значения, полученные нами, соответствуют наибольшему коэффициенту плотности и наибольшим значениям отличия величин главных моментов. Однако значения угла ϕ_2 находятся во внутренности рассматриваемой области. Найденный нами результат в обоих случаях практически одинаковый. Возмущающие параметры в наихудшем случае близки к одной из узловых точек рассматриваемой области.

Таблица 4. Наихудшие значения параметров, полученные исходя из статистического ансамбля

Количество варьируемых параметров	6	7
Варьируемые параметры	$\delta J_{11}, \delta J_{22}, \delta J_{33}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$	$\delta J_{11}, \delta J_{22}, \delta J_{33}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \delta \rho$
Количество вычислений точности ориентации	26492	26492
Максимальный угол отклонения, градусы	$\psi = 45.70^\circ$	$\psi = 43.54^\circ$
Коэффициент плотности	$\delta \rho = 1.25$ (фиксированный)	$\delta \rho = 1.20$
Углы отклонения главных осей инерции	$\varphi_1 = 2.95^\circ$ $\varphi_2 = -2.91^\circ$ $\varphi_3 = -4.59^\circ$	$\varphi_1 = 4.37^\circ$ $\varphi_2 = -1.69^\circ$ $\varphi_3 = -3.34^\circ$
Отличие величин главных моментов	$\delta J_{11}^{\text{диаг}} = 0.047$ $\delta J_{22}^{\text{диаг}} = -0.049$ $\delta J_{33}^{\text{диаг}} = 0.020$	$\delta J_{11}^{\text{диаг}} = 0.038$ $\delta J_{22}^{\text{диаг}} = -0.049$ $\delta J_{33}^{\text{диаг}} = -0.029$
Матрица возмущений тензора $\delta \mathbf{J}$	$\begin{pmatrix} 1.0206 & -0.0519 & -0.0525 \\ 0.0452 & 0.9711 & -0.0805 \\ 0.0558 & 0.0808 & 1.0053 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0153 & -0.0299 & -0.0775 \\ 0.0242 & 0.9728 & -0.0588 \\ 0.0766 & 0.0574 & 0.9810 \end{pmatrix}$
Возмущенный тензор $\mathbf{J}_{\text{возм}}$	$\begin{pmatrix} 0.1464 & -0.0015 & -0.0029 \\ -0.0015 & 0.1188 & -0.0021 \\ -0.0029 & -0.0021 & 0.0922 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.1449 & -0.0009 & -0.0044 \\ -0.0009 & 0.1187 & -0.0018 \\ -0.0044 & -0.0018 & 0.0879 \end{pmatrix}$

Таблица 5. Задачи оптимизации для метода роя и параметры метода

Количество искомых параметров	6	7
Параметры оптимизации	$\delta J_{11}, \delta J_{22}, \delta J_{33}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$	$\delta J_{11}, \delta J_{22}, \delta J_{33}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \delta \rho$
Целевая функция	$\Phi = -\max \left(\max_{t \in [0, 6T]} (\alpha(t)), \max_{t \in [0, 6T]} (\beta(t)), \max_{t \in [0, 6T]} (\gamma(t)) \right) \rightarrow \min$	
Область поиска	$\mathbb{U} = \left\{ \begin{array}{l} -0.05 \leq \delta J_{ii} \leq 0.05, \quad i = \overline{1, 3} \\ -5^\circ \leq \varphi_i \leq -5^\circ, \quad i = \overline{1, 3} \end{array} \right\}$ $\delta \rho = 1.25$	$\mathbb{U} = \left\{ \begin{array}{l} -0.05 \leq \delta J_{ii} \leq 0.05, \quad i = \overline{1, 3} \\ -5^\circ \leq \varphi_i \leq -5^\circ, \quad i = \overline{1, 3} \\ 0.75 \leq \delta \rho \leq 1.25 \end{array} \right\}$
Количество итераций метода	150	150
Количество частиц в рое	24	35
Количество итераций, при котором поиск завершился	131	140
Количество вычислений целевой функции	3144	4900

Таблица 6. Наихудшие значения параметров, найденные методом роя

Количество искомых параметров	6	7
Максимальный угол отклонения, градусы	$\psi = 49.13^\circ$	$\psi = 49.18^\circ$
Коэффициент плотности	$\delta\rho = 1.25$	$\delta\rho = 1.2498$
Углы отклонения главных осей инерции	$\varphi_1 = 4.99^\circ$ $\varphi_2 = -3.11^\circ$ $\varphi_3 = -4.99^\circ$	$\varphi_1 = 4.99^\circ$ $\varphi_2 = -3.31^\circ$ $\varphi_3 = -4.99^\circ$
Отличие величин главных моментов	$\delta J_{11}^{\text{диаг}} = 0.049$ $\delta J_{22}^{\text{диаг}} = -0.049$ $\delta J_{33}^{\text{диаг}} = -0.049$	$\delta J_{11}^{\text{диаг}} = 0.049$ $\delta J_{22}^{\text{диаг}} = -0.049$ $\delta J_{33}^{\text{диаг}} = -0.049$
Матрица возмущений тензора δJ	$\begin{pmatrix} 1.0192 & -0.0555 & -0.0891 \\ 0.0450 & 0.9697 & -0.0891 \\ 0.0891 & 0.0847 & 0.9671 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0191 & -0.0592 & -0.0891 \\ 0.0485 & 0.9694 & -0.0894 \\ -0.0895 & 0.0847 & 0.9669 \end{pmatrix}$
Возмущенный тензор $J_{\text{возм}}$	$\begin{pmatrix} 0.1464 & -0.0018 & -0.0055 \\ -0.0018 & 0.1186 & -0.0027 \\ -0.0055 & -0.0027 & 0.0863 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.1464 & -0.0019 & -0.0055 \\ -0.0019 & 0.1186 & -0.0027 \\ -0.0055 & -0.0027 & 0.0863 \end{pmatrix}$

Таким образом, анализ точности ориентации в зависимости от возмущающих параметров может проводиться следующим образом: первый шаг исследования — получение значений в узловых точках границы простым перебором, далее получение статистического ансамбля на всем рассматриваемом пространстве возмущающих параметров (без фиксирования какого-то из них) и поиск наихудшего из значений с использованием метода глобальной оптимизации (например, метода роя, как было показано в работе).

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматриваются способы получения информации о точности ориентации КА при выполнении миссии по отслеживанию некоторого заданного целевого режима на области возмущающих параметров — плотности атмосферы и неточности знания тензора инерции КА.

Описанные методы предоставляют возможность оценить область параметров с разных точек зрения — найти худшую точность (с некоторой погрешностью численного метода оптимизации),

либо посмотреть на область в целом, чтобы собрать статистические данные о том, какие возмущения с какой вероятностью приводят к каким ошибкам ориентации.

Предложенный подход может быть расширен на большую размерность области возмущающих параметров. Можно учесть влияние смещения центра масс аппарата, а также других возмущений, вызванных погрешностями сборки КА и внешними возмущениями. При этом количество вычислений методом перебора увеличивать не потребуется, если задать такой же уровень достоверности полученной информации, как в рассмотренных примерах. Метод роя также одинаково хорошо справится с областью параметров любой размерности, кроме того число частиц в рое и число итераций можно подобрать специально для каждой задачи, чтобы ускорить процесс поиска.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 23-72-30002, <https://rscf.ru/en/project/23-72-30002/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Brasoveanu D., Hashmall J. Spacecraft Attitude Determination Accuracy From Mission Experience // Flight Mech. Theory, NASA, 1994. P. 153–168. <https://www.tib.eu/de/suchen/id/BLCP%3ACN003744905>
- Игнатов А.И., Иванов Г.А., Коломиец Е.С. и др. Реализация режима солнечной ориентации космического аппарата с помощью системы двигателей-маховиков // Косм. исслед. 2023. Т. 61. С. 143–156. <https://journals.rcsi.science/0023-4206/article/view/137338>
- Boussadia H., Mohammed M., Abdelkrim M. et al. Estimation of satellite attitude dynamics and external torques via mixed Kalman/H-infinity filter under inertia uncertainties // Aerosp. Syst. 2023. V. 6. P. 633–640. <https://doi.org/10.1007/s42401-023-00235-4>
- Kim J., Bang H. Observer-Based Disturbance Estimation for a Spacecraft Inertial Pointing Using Magnetic Torquers // Trans. JAPAN Soc. Aeronaut. Sp. Sci. Aerosp. Technol. JAPAN. 2019. V. 17. <https://doi.org/10.2322/tastj.17.447>
- Ivanov D., Roldugin D. Nanosatellite Three-Axis Attitude Control and Determination Using Two Magnetorquers Only // Proc. 9th International Conference on Recent Advances in Space Technologies. Istanbul, Turkey. 2019. P. 761–768. <https://doi.org/10.1109/RAST.2019.8767828>
- Ivanov D., Roldugin D., Ovchinnikov M. Three-Axis Attitude Determination Using Magnetorquers // J. Guid. Control Dyn. 2018. V. 41. P. 1–24. <https://doi.org/10.2514/1.G003698>
- Ivanov D.S., Ovchinnikov M.Y., Penkov V.I. et al. Advanced numerical study of the three-axis magnetic attitude control and determination with uncertainties // Acta Astronaut. 2017. V. 132. P. 103–110. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2016.11.045>
- Ulrich S., Côté J., de Lafontaine J. In-Flight Attitude Perturbation Estimation for Earth-Orbiting Spacecraft // J. Astronaut. Sci. 2009. V. 57. <https://doi.org/10.1007/BF03321520>
- Khurshid O., Selkäinaho J., Soken H. et al. Small satellite attitude determination during plasma brake deorbiting experiment // Acta Astronaut. 2016. V. 129. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2016.08.035>
- Wertz J. Spacecraft Attitude Determination And Control. Springer, 1978. <https://doi.org/10.1007/978-94-009-9907-7>
- ECSS-E-ST-60-10C, Space engineering — Control performance, ECSS Secretariat ESA-ESTEC Requirements & Standards Division, Noordwijk, The Netherlands, 2008.
- ECSS-E-HB-60-10A, Space engineering — Control performance guidelines, ECSS Secretariat ESA-ESTEC Requirements & Standards Division, Noordwijk, The Netherlands, 2010.
- Kennedy J., Eberhart R. Particle swarm optimization // Proc. ICNN'95-International Conf. Neural Networks. Perth, WA, Australia. 1995. P. 1942–1948.
- Guerman A.D., Ivanov D.S., Roldugin D.S. et al. Orbital and Angular Dynamics Analysis of the Small Satellite SAR Mission INFANTE // Cosmic Research. 2020. V. 58. P. 206–217. <https://doi.org/10.1134/S0010952520030016>
- Зубов В.И. Лекции по теории управления. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва “Наука”, 1975.
- Tsiotras P. New Control Laws for the Attitude Stabilization of Rigid Bodies // IFAC Proc. 1994. V. 27. P. 321–326. [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)45820-4](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)45820-4)
- Овчинников М.Ю., Ткачев С.С., Карпенко С.О. Исследование углового движения микроспутника Чибис-М с трехосным маховиковым управлением // Косм. исслед. 2012. Т. 50. С. 462–471.
- Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
- Annenkova A., Abdelrahman N., Ivanov D. et al. CubeSat Magnetic Atlas and in-Orbit Compensation of Residual Magnetic Dipole // Proc. 71th International Astronautical Congress. The CyberSpace Edition. 12–14 October 2020.
- Ovchinnikov M., Ivanov D. Approach to study satellite attitude determination algorithms // Acta Astronaut. 2014. V. 98. P. 133–137. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2014.01.024>
- Ivanov D., Ovchinnikov M., Ivlev N. et al. Analytical study of microsatellite attitude determination algorithms // Acta Astronaut. 2015. V. 116 P. 339–348. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2015.07.001>
- Chasset C., Noteborn R., Bodin P. et al. 3-Axis magnetic control: flight results of the TANGO satellite in the PRISMA mission // CEAS Sp. J. 2013. V. 5. P. 1–17. <https://doi.org/10.1007/s12567-013-0034-9>
- Bodin P., Larsson R., Nilsson F. et al. PRISMA: An In-Orbit Test Bed for Guidance, Navigation, and Control Experiments // J. Spacecr. Rockets. 2009. V. 46. P. 615–623. <https://doi.org/10.2514/1.40161>
- Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Penkov V.I. et al. Fully magnetic sliding mode control for acquiring three-axis attitude // Acta Astronaut. 2016. V. 121. P. 59–62. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2015.12.031>
- Tkachev S., Mashtakov Y., Ivanov D. et al. Effect of Reaction Wheel Imbalances on Attitude and Stabilization Accuracy // Aerosp. 2021. V. 8. <https://doi.org/10.3390/aerospace8090252>
- Alcorn J., Allard C., Schaub H. Fully Coupled Reaction Wheel Static and Dynamic Imbalance for Spacecraft

- Jitter Modeling // *J. Guid. Control. Dyn.* 2018. V. 41. P. 1380–1388.
<https://doi.org/10.2514/1.G003277>
27. *Hoeffding W.* Probability Inequalities for Sums of Bounded Random Variables // *J. Am. Stat. Assoc.* 1963. V. 58. P. 13–30.
<https://doi.org/10.1080/01621459.1963.10500830>
28. *Dvoretzky A., Kiefer J., Wolfowitz J.* Asymptotic Minimax Character of the Sample Distribution Function and of the Classical Multinomial Estimator // *Ann. Math. Stat.* 1956. V. 27. P. 642–669.
<https://doi.org/10.1214/aoms/1177728174>
29. *Kuzin S., Bogachev S., Pertsov A. et al.* EUV telescope for a Cubesat nanosatellite // *Appl. Opt.* 2023. 62. P. 8462–8471.
<https://doi.org/10.1364/AO.501437>
30. *Kennedy R., Eberhart J.* Particle swarm optimization // *Proc. Int. Conf. Neural Networks. IEEE.* Perth, Australia. 1995. V. 4. P. 1942–1948.
31. *Trelea I.C.* The particle swarm optimization algorithm: convergence analysis and parameter selection // *Inf. Process. Lett.* 2003. V. 85. P. 317–325.
[https://doi.org/10.1016/S0020-0190\(02\)00447-7](https://doi.org/10.1016/S0020-0190(02)00447-7)
32. *Vanderbergh F., Engelbrecht A.* A study of particle swarm optimization particle trajectories // *Inf. Sci.* 2006. V. 176. P. 937–971.
33. *Okhitina A., Roldugin D., Tkachev S.* Application of the PSO for the construction of a 3-axis stable magnetically actuated satellite angular motion // *Acta Astronaut.* 2022. V. 195. P. 86–97.
<https://doi.org/10.1016/J.ACTAASTRO.2022.03.001>
34. *Okhitina A., Roldugin D., Tkachev S.* Magnetically controllable attitude trajectory constructed using the particle swarm optimization method // *72nd Int. Astronaut. Congr. Dubai, UAE.* 2021.
35. *Okhitina A., Tkachev S., Roldugin D.* Comparative cost functions analysis in the construction of a reference angular motion implemented by magnetorquers // *Aerospace.* 2023. V. 10. Art.ID. 468.
36. *Белецкий В.В., Яншин А.М.* Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Киев: Наук. думк., 1984.
37. *Dutoit S.H.C.* Graphical Exploratory Data Analysis. Springer, 2012.

PARAMETRIC ANALYSIS AND ESTIMATION OF THE WORST ATTITUDE ACCURACY OF A SATELLITE

© 2025 A. S. Drobysheva¹, S. S. Tkachev^{2,*}

¹*Space Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

²*Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia*

*e-mail: stevens_L@mail.ru

The paper considers the angular motion of a spacecraft under the influence of various disturbing torques. A method for studying the space of disturbing parameters is proposed to estimate the probability of attitude accuracy falling within a certain interval, as well as to identify the worst accuracy and the corresponding disturbing parameters. To analyze the structure of the entire set of disturbing parameters, a method for obtaining a statistical ensemble and further interpretation of the data is used. The worst value of the attitude accuracy is sought using the particle swarm optimization method, which takes into account the restrictions on the disturbing parameters. A numerical example of analyzing the attitude accuracy in the orbital stabilization mode by both methods is given.