

УДК 531.36:521.1

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКА С ЦЕНТРОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАРЯДА ЗАЩИТНЫХ ЭКРАНОВ В ЦЕНТРЕ МАСС

© 2025 г. В. И. Каленова<sup>1,\*</sup>, В. М. Морозов<sup>1, \*\*</sup>, В. Ю. Сахаров<sup>2, \*\*\*</sup>,  
А. А. Тихонов<sup>2, \*\*\*\*</sup>

<sup>1</sup>Научно-исследовательский институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

\*e-mail: kalenova44@mail.ru

\*\*e-mail: moroz@imec.msu.ru

\*\*\*e-mail: v.sakharov@spbu.ru

\*\*\*\*e-mail: a.tikhonov@spbu.ru

Поступила в редакцию 06.12.2024 г.

После доработки 27.01.2025 г.

Принята к публикации 03.02.2025 г.

Рассматривается спутник с системой из трех концентрических экранов электростатической защиты от космических излучений. Взаимодействие электрического заряда с магнитным полем Земли приводит к возникновению момента сил Лоренца, действующего на вращательное движение спутника относительно центра масс. Момент сил Лоренца вычисляется с учетом сложной формы экранов электростатической защиты. Геомагнитное поле моделируется прямым магнитным диполем. Выписаны дифференциальные уравнения движения спутника около центра масс и построены первые интегралы этих уравнений. Найдены стационарные движения спутника и получены достаточные условия их устойчивости.

DOI: 10.31857/S0023420625040049, EDN: QNLPHU

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Разнообразные задачи о движении спутника около центра масс под действием гравитационных, магнитных и аэродинамических моментов подробно исследовались во многих работах (см. обзоры [1, 2]). Влияние гравитационного момента на вращательное движение спутника подробно описано в монографии [3].

В настоящей работе рассматривается движение динамически симметричного спутника на круговой орбите в гравитационном и магнитном полях. В этом случае уравнения движения допускают стационарные режимы — регулярные прецессы. Для движения спутника в гравитационном поле достаточные условия устойчивости получены в исследовании [4] при помощи построения функций Ляпунова. Аналогичные условия были сформулированы в статье [5]. Результаты этих работ обобщены в публикации [6] для случая, когда спутник представляет собой гиростат. В работе [7] получены достаточные условия устойчивости

регулярных прецессий спутника-гиростата, движущегося под действием гравитационного, магнитного и аэродинамического моментов.

В обзоре [8] анализируется динамика углового движения спутников с магнитными демпферами и постоянными магнитами. Такие пассивные магнитные системы ориентации получили широкое распространение на заре космической эры и остаются актуальными в настоящее время в связи с их использованием для малых и наноспутников, отличающихся жесткими ограничениями по массе, размеру, стоимости и энергетике. Резонансные явления в колебаниях гравитационно-ориентированного спутника под действием возмущающих моментов произвольной природы анализируются в публикации [9].

Здесь, в отличие от ранее рассмотренных работ (например, [10]), исследуется движение около центра масс в гравитационном и магнитном полях спутника, который оснащен системой электростатической защиты.

Космическая радиация представляет собой серьезную проблему, поэтому возникает необходимость в защите спутника от космического излучения. Перспективным решением проблемы радиационной защиты является электростатическая защита от излучения (ЭСЗ), основанная на использовании легкого электростатически заряженного экрана, покрывающего защищаемый объем. Ранее предложены различные варианты защитного экрана ЭСЗ [11, 12].

В настоящее время известны различные конфигурации заряженных поверхностей ЭСЗ [13, 14]. Было показано, что лучшую защиту от космического излучения обеспечивает тороидальная структура в системе ЭСЗ. Кроме того, вариант использования экранов тороидальной формы рассматривается как перспективный и более предпочтительный по массо-габаритным характеристикам [15]. Поэтому представляет интерес исследование модели спутника с тремя заряженными тороидальными поверхностями.

Электростатический заряд спутника, движущегося в геомагнитном поле, приводит к возникновению момента сил Лоренца, влияющего на движение спутника относительного центра масс. Эта задача рассматривалась во многих работах (см. [16–23] и цитируемые в них статьи). В работе [23] демонстрируется, что путем управляемого изменения радиус-вектора центра заряда спутника относительно центра масс можно создать управляющий момент сил Лоренца и использовать его в качестве восстанавливающего момента в окрестности положения равновесия спутника в орбитальной системе координат.

Цель настоящей работы — определение стационарных движений динамически симметричного спутника, снабженного экранами электростатической защиты, и исследование их устойчивости.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается спутник, центр масс которого движется по круговой околоземной экваториальной орбите радиуса  $R$ . Спутник оснащен экранами ЭСЗ.

Для рассмотрения динамики спутника вводятся следующие системы координат:

- $O\xi\eta\zeta$  — орбитальная система координат с началом в центре масс спутника, ось  $O\zeta$  которой направлена по радиусу вектору орбиты, ось  $O\eta$  — по нормали к плоскости орбиты, ось  $O\xi$  допол-

няет систему до правой тройки;  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  — единичные векторы системы  $O\xi\eta\zeta$ ;

- $Oxyz$  — система, жестко связанная со спутником и с осями, направленными по главным центральным осям инерции;  $i_k$  — единичные векторы системы  $Oxyz$ ;

$$\xi_0 = \sum_{k=1}^3 \alpha_k i_k, \quad \eta_0 = \sum_{k=1}^3 \beta_k i_k, \quad \zeta_0 = \sum_{k=1}^3 \gamma_k i_k.$$

Взаимная ориентация осей систем координат  $O\xi\eta\zeta$  и  $Oxyz$  описывается матрицей направляющих косинусов с элементами [3, 24]:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos\phi \cos\varphi - \sin\phi \sin\varphi \cos\theta, \\ \alpha_2 &= -\cos\phi \sin\varphi - \sin\phi \cos\varphi \cos\theta, \\ \alpha_3 &= \sin\theta \sin\phi, \\ \beta_1 &= \sin\phi \cos\varphi + \cos\phi \sin\varphi \cos\theta, \\ \beta_2 &= -\sin\phi \sin\varphi + \cos\phi \cos\varphi \cos\theta, \\ \beta_3 &= -\cos\phi \sin\theta, \\ \gamma_1 &= \sin\phi \sin\theta, \quad \gamma_2 = \cos\phi \sin\theta, \quad \gamma_3 = \cos\theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть спутник представляет собой динамически симметричное твердое тело, центральный эллипсоид инерции которого является эллипсоидом вращения относительно оси  $x_3$ , при этом главные центральные моменты инерции спутника  $J_1 = J_2 \neq J_3$ .

Компоненты абсолютной угловой скорости спутника в проекциях на собственные оси имеют вид [3, 6]

$$\begin{aligned} \omega_1 &= p + \omega_0 \beta_1, \quad \omega_2 = q + \omega_0 \beta_2, \quad \omega_3 = r + \omega_0 \beta_3, \\ p &= \dot{\phi} \gamma_1 + \dot{\theta} \cos\varphi, \\ q &= \dot{\phi} \gamma_2 - \dot{\theta} \sin\varphi, \\ r &= \dot{\phi} \gamma_3 + \dot{\phi}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\omega_0$  — величина угловой скорости орбитального движения;  $p, q, r$  — проекции угловой скорости  $\omega'$  спутника относительно орбитальной системы координат.

Система ЭСЗ включает три заряженных экрана в виде проводящих тороидальных поверхностей, окружающих защищаемый объем (рис. 1) [14]. Заряженные торы жестко соединены со спутником, представляющим собой защищаемый объем, стержнями из диэлектрического материала. На поверхности каждого тора имеется электростатический заряд. Геомагнитное поле моделируется прямым магнитным диполем.

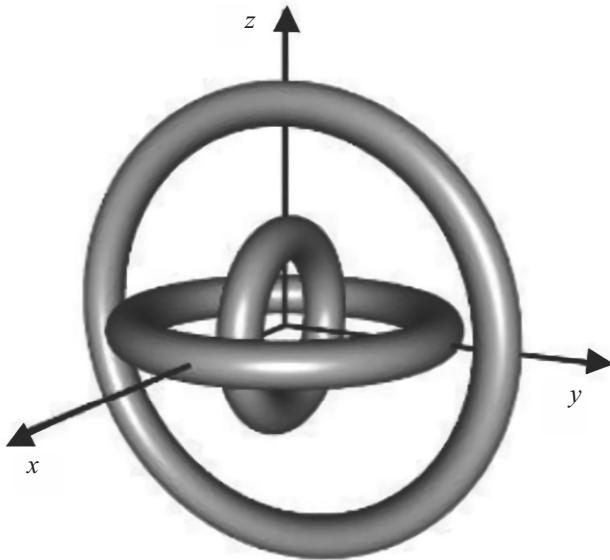


Рис. 1. Три взаимно перпендикулярных непересекающихся тора

В предположении, что центр заряда совпадает с центром масс спутника, а главные центральные оси заряда совпадают с главными центральными осями инерции спутника, электрические свойства спутника с системой ЭСЗ характеризуются тензором заряда  $\Sigma = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$  [17] с постоянными элементами

$$a_1 = \iint_S \sigma x^2 dS, \quad a_2 = \iint_S \sigma y^2 dS, \quad a_3 = \iint_S \sigma z^2 dS,$$

где  $\sigma$  — плотность распределения зарядов по трехсвязной поверхности  $S$ , являющейся объединением трех тороидальных поверхностей.

При движении спутника относительно магнитного поля Земли возникает момент сил Лоренца  $\mathbf{M}_L$ . Если  $\mathbf{B}_C$  — вектор магнитной индукции геомагнитного поля в центре масс спутника, то в случае совпадения центра заряда с центром масс спутника момент  $\mathbf{M}_L$  вычисляется по формуле [17]

$$\mathbf{M}_L = \boldsymbol{\omega}' \times (\Sigma \cdot \mathbf{B}_C) + (\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\omega}_E) \times (\Sigma \cdot \mathbf{B}_C) + (D_C \cdot \Sigma - D_C \cdot \Sigma) \mathbf{V}_C.$$

Здесь  $\boldsymbol{\omega}_E$  — угловая скорость суточного вращения Земли;  $\mathbf{V}_C = R(\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\omega}_E) \xi_0$  — скорость центра масс спутника относительно геомагнитного поля;  $D_C$  — тензор 2-го ранга, называемый градиентом поля вектора  $\mathbf{B}_C$ ; оператор “ $\cdot$ ” представляет собой двойное скалярное произведение,

определенное для тензоров 2-го ранга  $A$  и  $B$  по формуле  $A \cdot B = \sum_{i_1} \sum_{i_2} A_{i_2 i_1} B_{i_1 i_2}$ .

В условиях сделанных выше предположений о форме орбиты спутника и о модели магнитного поля Земли, в выражении момента  $\mathbf{M}_L$  обнуляются слагаемые, зависящие от тензора  $D_C$ , отвечающего за учет градиентности геомагнитного поля в объеме спутника. Кроме того, индукция геомагнитного поля оказывается постоянной во всех точках орбиты спутника. Поэтому выражение момента  $\mathbf{M}_L$  существенно упрощается, так что в проекциях на оси  $x, y, z$  принимает вид [17]

$$\begin{aligned} M_{1L} &= \mu [a_2 \beta_2 r - a_3 \beta_3 q + \\ &+ (\omega_0 - \omega_E)(a_2 - a_3)(3\gamma_2 \gamma_3 - 2\beta_2 \beta_3)], \\ M_{2L} &= \mu [a_3 \beta_3 p - a_1 \beta_1 r + \\ &+ (\omega_0 - \omega_E)(a_3 - a_1)(3\gamma_3 \gamma_1 - 2\beta_3 \beta_1)], \\ M_{3L} &= \mu [a_1 \beta_1 q - a_2 \beta_2 p + \\ &+ (\omega_0 - \omega_E)(a_1 - a_2)(3\gamma_1 \gamma_2 - 2\beta_1 \beta_2)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\mu = g_1^0 \left( \frac{R_E}{R} \right)^3$ ,  $R_E$  — радиус Земли;  $g_1^0$  — гауссов коэффициент. Параметр  $g_1^0 = -29557 \cdot 10^{-9} \text{ Т}$  (<https://www.ngdc.noaa.gov/IAGA/vmod/igrf.html>),  $\mu < 0$ .

### 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Динамические уравнения движения спутника около центра масс в гравитационном и магнитном полях в проекциях на оси связанный системы координат  $Oxyz$  имеют вид [3]

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_1) \omega_2 \omega_3 &= M_{1G} + M_{1L}, \\ J_1 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_3 \omega_1 &= M_{2G} + M_{2L}, \\ J_3 \dot{\omega}_3 &= M_{3L}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $M_{1G} = 3\omega_0^2 (J_3 - J_1) \gamma_2 \gamma_3$ ,  $M_{2G} = \omega_0^2 (J_1 - J_3) \gamma_3 \gamma_1$  — компоненты гравитационного момента;  $M_{1L}, M_{2L}, M_{3L}$  — компоненты момента, созданные силами Лоренца, действующими на заряженную поверхность спутника, которые определяются соотношениями (3).

Для полного описания динамики спутника следует дополнить динамические уравнения (4) кинематическими уравнениями.

Дифференциальные уравнения (2), (4) допускают первый интеграл

$$\begin{aligned}
 I_1 = & J_1(p^2 + q^2) + J_3r^2 - \omega_0^2[J_1(\beta_1^2 + \beta_2^2) + \\
 & + J_3\beta_3^2] + 3\omega_0^2[J_1(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + J_3\gamma_3^2] - \\
 & - \mu(\omega_0 - \omega_E)[3(a_1\gamma_1^2 + a_2\gamma_2^2 + a_3\gamma_3^2) - \\
 & - 2(a_1\beta_1^2 + a_2\beta_2^2 + a_3\beta_3^2)] = \text{const.}
 \end{aligned} \quad (5)$$

При  $a_1 = a_2$  имеет место еще и следующий интеграл

$$I_2 = J_3(r + \omega_0\beta_3) - \mu a_1\beta_3 = \text{const.} \quad (6)$$

Далее предполагается, что  $a_1 = a_2$ . Допустимость такого предположения показана в Приложении.

#### 4. СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

Уравнения (2), (4) допускают стационарные движения

$$\theta = \theta_0, \phi = \phi_0, \dot{\theta} = 0, \dot{\phi} = 0, \dot{\phi} = \Omega = \text{const}, \quad (7)$$

которые существуют при выполнении условий

$$\begin{aligned}
 \sin\phi_0(\Omega d + A \sin\theta_0 \cos\phi_0) &= 0, \\
 \cos\theta_0[(\Omega d + A \sin\theta_0 \cos\phi_0) \cos\phi_0 + B \sin\theta_0] &= 0,
 \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}
 A &= (J_1 - J_3)\omega_0^2 + 2\tilde{\mu}(a_3 - a_1), \\
 B &= 3[(J_1 - J_3)\omega_0^2 + \tilde{\mu}(a_3 - a_1)], \\
 d &= J_3\omega_0 - \mu a_1, \tilde{\mu} = \mu(\omega_0 - \omega_E).
 \end{aligned}$$

Стационарные движения следующие.

##### № 1. Цилиндрическая прецессия [3–5]

$$\sin\phi_0 = 0; \cos\theta_0 = 0, \text{т.е. } \phi_0 = 0, \pi; \theta_0 = \frac{\pi}{2}. \quad (9)$$

В этом движении ось симметрии спутника коллинеарна нормали к плоскости орбиты, в абсолютном пространстве она описывает цилиндрическую поверхность.

##### № 2. Гиперболоидальная прецессия [3–5]

$$\sin\phi_0 \neq 0; \cos\theta_0 = 0, \text{т.е. } \phi = \phi_0; \theta_0 = \frac{\pi}{2}. \quad (10)$$

Ось симметрии ортогональна радиус-вектору центра масс спутника и образует постоянный угол с нормалью к плоскости орбиты. Поверхность, описываемая осью симметрии в абсолютном пространстве, является однополостным гиперболоидом вращения.

Из условий (8) следует

$$\cos\phi_0 = -\frac{d\Omega}{A}, \quad \left( \left| \frac{d\Omega}{A} \right| \leq 1 \right). \quad (11)$$

##### № 3. Коническая прецессия [3–5]

$$\sin\phi_0 = 0; \cos\theta_0 \neq 0, \text{т.е. } \phi_0 = 0, \pi; \theta = \theta_0 \neq \frac{\pi}{2}. \quad (12)$$

В этом движении ось симметрии ортогональна вектору скорости центра масс спутника и образует постоянный угол с нормалью к плоскости орбиты. Поверхность, описываемая осью симметрии в абсолютном пространстве, — круговой конус, ось которого перпендикулярна плоскости орбиты.

Из условий (8) следует

$$\sin\theta_0 = -\frac{d\Omega \cos\phi_0}{A + B}, \quad \left( \left| \frac{d\Omega \cos\phi_0}{A + B} \right| \leq 1 \right). \quad (13)$$

##### № 4 $\sin\phi_0 \neq 0; \cos\theta_0 \neq 0$ [14]

Это решение существует при выполнении условий

$$\Omega d + A \sin\theta_0 \cos\phi_0 = 0, B \sin\theta_0 = 0. \quad (15)$$

Здесь возможны случаи

а)  $\theta_0 = 0, \pi$ , тогда  $d\Omega = 0$ , что реализуется либо при  $\Omega = 0$  (т.е. положение относительного равновесия), либо при  $d = 0$ , т.е.  $\mu a_1 = J_3\omega_0$ ;

б)  $\theta_0 \neq 0, \pi$ , тогда  $B = 0$ , т.е.  $\tilde{\mu}(a_3 - a_1) = (J_3 - J_1)\omega_0^2, A = (J_3 - J_1)\omega_0^2$ .

Заметим, что режимы регулярных прецессий в рассматриваемой задаче те же, что и при движении симметричного твердого тела в гравитационном поле [3–5].

#### 5. УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Для исследования устойчивости указанных регулярных прецессий используется метод, при котором функции Ляпунова формируются из интегралов уравнений возмущенного движения, отличающихся от интегралов, применяемых при учете только гравитационного поля. Из-за наличия дополнительных конструктивных параметров спутника, связанных с электростатической защитой, достаточные условия устойчивости рассматриваемых регулярных прецессий

должны, вообще говоря, существенно отличаться от полученных ранее известных условий.

Рассмотрим стационарное движение (9), где для определенности  $\phi_0 = \pi$ . Положим в возмущенном движении

$$\theta = \frac{\pi}{2} + x_1, \phi = \pi + x_2, \dot{\theta} = x_3, \dot{\phi} = x_4, \dot{\phi} = \Omega + x_5.$$

Тогда интегралы  $I_1, I_2$  примут вид

$$\begin{aligned} I_1 &= -A(x_1^2 + x_2^2) - Bx_1^2 + J_1(x_3^2 + x_4^2) + \\ &+ J_3x_5^2 + 2\Omega J_3(x_5 - x_1x_4) + \dots = \text{const}, \\ I_2 &= d(x_1^2 + x_2^2) - 2J_3(x_5 - x_1x_4) + \dots = \text{const}. \end{aligned}$$

Функцию Ляпунова возьмем в виде

$$V = I_1 + \Omega I_2 = F_1x_1^2 + F_2x_2^2 + J_1(x_3^2 + x_4^2) + J_3x_5^2,$$

где  $F_1 = -A - B + \Omega d, F_2 = -A + \Omega d$ .

Линейные слагаемые в функции  $V$  уничтожаются.

Достаточные условия устойчивости стационарного движения (9) имеют вид:  $F_1 > 0, F_2 > 0$ , т.е.

$$\begin{aligned} 4(J_3 - J_1)\omega_0^2 + 5\tilde{\mu}(a_1 - a_3) + \Omega(J_3\omega_0 - \mu a_1) &> 0, \\ (J_3 - J_1)\omega_0^2 + 2\tilde{\mu}(a_1 - a_3) + \Omega(J_3\omega_0 - \mu a_1) &> 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Если ввести безразмерные параметры

$$\alpha = \frac{J_1}{J_3}; \beta = \frac{\tilde{\mu}(a_1 - a_3)}{J_3\omega_0^2}; \gamma = 1 - \frac{\mu a_1}{J_3\omega_0}; \bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega_0}, \quad (17)$$

то достаточные условия устойчивости примут вид

$$\bar{\Omega}\gamma > 4\alpha - 4 - 5\beta, \quad \bar{\Omega}\gamma > \alpha - 1 - 2\beta.$$

В зависимости от знаков параметра  $\beta$ , зависящего от величин и расположения зарядов экрана, необходимо использовать первое или второе неравенство для определения ограничения на величину параметра  $\bar{\Omega}$ , связанного с угловой скоростью  $\Omega$  (знаки параметров  $\bar{\Omega}$  и  $\Omega$  совпадают).

Введем в рассмотрение величины  $G = \omega_0^2(J_1 - J_3)$  и  $L = -\mu(\omega_0 - \omega_E)(a_1 - a_3)$ , имеющие размерность момента силы и происходящие соответственно от гравитационного и лоренцева моментов, действующих на спутник. Кроме того, пусть  $g = J_3\omega_0^2$ ,

$l = -\mu\omega_0 a_1 = -g_1^0 \left( \frac{R_E}{R} \right)^3 \omega_0 a_1$ . Тогда можно переписать неравенства (16) в виде

$$\bar{\Omega} > \frac{4G + 5L}{g + l}, \quad \bar{\Omega} > \frac{G + 2L}{g + l},$$

наглядно отражающем влияние гравитационного и лоренцева моментов на условия устойчивости стационарного движения (9).

Стационарное движение (10) существует при условии (11).

В возмущенном движении

$$\theta = \frac{\pi}{2} + x_1, \phi = \phi_0 + x_2, \dot{\theta} = x_3, \dot{\phi} = x_4, \dot{\phi} = \Omega + x_5. \quad (18)$$

Интегралы  $I_1, I_2$  в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} I_1 &= (-B - A\cos^2\phi_0)x_1^2 - A\cos 2\phi_0 x_2^2 + \\ &+ J_1(x_3^2 + x_4^2) + J_3x_5^2 - 2J_3\Omega x_1 x_4 + \\ &+ 2J_3\Omega x_5 - A\sin 2\phi_0 x_2 + \dots = \text{const}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= d \cos \phi_0 (x_1^2 + x_2^2) - 2J_3 x_1 x_4 + \\ &+ 2J_3 x_5 + 2d \sin \phi_0 x_2 + \dots = \text{const}. \end{aligned}$$

Функцию Ляпунова возьмем в виде  $V = I_1 - \Omega I_2 + \frac{\lambda}{4J_3} I_2^2$ , здесь  $\lambda$  — неопределенный множитель. Линейные слагаемые в функции  $V$  уничтожаются в силу условий (11). Тогда функция  $V$  принимает вид

$$V = F_3x_1^2 + F_4x_2^2 + J_1(x_3^2 + x_4^2) + F_5x_5^2 + 2F_6x_2x_5,$$

где

$$F_3 = -B, F_4 = \frac{1}{J_3}(AJ_3 + \lambda d^2)\sin^2\phi_0,$$

$$F_5 = J_3(1 + \lambda), F_6 = \lambda d \sin \phi_0.$$

Достаточное условие устойчивости стационарного движения (10)  $F_3 > 0, F_5 > 0, F_4 F_5 - F_6^2 > 0$  или в явном виде, учитывая (11)

$$B < 0, 1 + \lambda > 0, (AJ_3 + d^2)\lambda + AJ_3 > 0. \quad (19)$$

Если  $AJ_3 + d^2 > 0$ , то всегда можно выбрать  $\lambda > 0$  так, чтобы обеспечить выполнение неравенств (19). При  $AJ_3 + d^2 < 0$  условия (19) несовместны. (В самом деле, пусть  $AJ_3 + d^2 = -f^2 < 0$ , тогда  $AJ_3 = -(d^2 + f^2) < 0$  и условия (19) принимают вид  $-f^2\lambda - (d^2 + f^2) < 0, \lambda + 1 > 0$ , что несовместно).

Таким образом, достаточные условия устойчивости стационарного движения (10) имеют вид

$$B < 0, \quad AJ_3 + d^2 > 0$$

или

$$(J_3 - J_1)\omega_0^2 + \tilde{\mu}(a_1 - a_3) > 0, \\ J_3[(J_3 - J_1)\omega_0^2 + 2\tilde{\mu}(a_1 - a_3)] - (J_3\omega_0 - \mu a_1)^2 < 0. \quad (20)$$

Для введенных параметров (17) эти условия принимают вид

$$1 + 2\beta - \gamma^2 < \alpha < 1 + \beta.$$

Из условия (13) следует, что стационарное движение (12) существует, если

$$\Omega d - (A + B)\sin\theta_0 = 0. \quad (21)$$

В возмущенном движении (для определенности полагаем  $\phi_0 = \pi$ )

$$\theta = \theta_0 + x_1, \phi = \pi + x_2, \dot{\theta} = x_3, \dot{\phi} = x_4, \dot{\phi} = \Omega + x_5.$$

В этом случае из выражений (1) следует

$$\beta_3 = \sin\theta_0 + \cos\theta_0 x_1 - \frac{1}{2}\sin\theta_0(x_1^2 + x_2^2), \\ \gamma_3 = \cos\theta_0 - \sin\theta_0 x_1 - \frac{1}{2}\cos\theta_0 x_1^2.$$

Тогда интегралы уравнений представляются в виде

$$I_1 = J_1(x_3^2 + \sin^2\theta_0 x_4^2) + J_3(x_5^2 + \cos^2\theta_0 x_4^2) - \\ - 2\Omega\sin\theta_0 x_1 x_4 + 2\cos\theta_0 x_4 x_5 + 2\Omega x_5 + 2\Omega\cos\theta_0 x_4) + \\ + A(\cos 2\theta_0 x_1^2 - \sin^2\theta_0 x_2^2 + \sin 2\theta_0 x_1) + \\ + B(\cos 2\theta_0 x_1^2 + \sin 2\theta_0 x_1) + \dots = \text{const},$$

$$I_2 = J_3(x_5 + \cos\theta_0 x_4 - \sin\theta_0 x_1 x_4) + \\ + d[\cos\theta_0 x_1 - \frac{1}{2}\sin\theta_0(x_1^2 + x_2^2)] + \dots = \text{const}.$$

Линейные слагаемые в функции Ляпунова  $V = I_1 - 2\Omega I_2$  уничтожаются в силу условий (21), и она принимает вид

$$V = F_7 x_1^2 + F_8 x_2^2 + J_1 x_3^2 + (J_1 \sin^2\theta_0 + J_3 \cos^2\theta_0) x_4^2 + \\ + J_3 x_5^2 + 2J_3 \cos\theta_0 x_4 x_5,$$

где  $F_7 = (A + B)\cos^2\theta_0$ ,  $F_8 = B\sin^2\theta_0$ .

Квадратичная форма относительно переменных  $x_4, x_5$  положительно определена. Достаточное условие устойчивости стационарного решения (12)  $A + B > 0, B > 0$  или в явном виде

$$4(J_1 - J_3)\omega_0^2 + 5\tilde{\mu}(a_3 - a_1) > 0, \\ (J_1 - J_3)\omega_0^2 + \tilde{\mu}(a_3 - a_1) > 0. \quad (22)$$

Перепишем эти условия с учетом (17)

$$\alpha > 1 + \frac{5}{4}\beta, \quad \alpha > 1 + \beta.$$

В зависимости от знака параметра  $\beta$  условием устойчивости является либо первое неравенство, либо второе.

Таким образом, наличие параметров ЭСЗ существенно влияет на условия устойчивости (16), (20), (22). В отсутствие электростатической защиты ( $\beta = 0, \gamma = 1$ ) эти условия совпадают с известными условиями устойчивости регулярных прецессий симметричного спутника в гравитационном поле [3–5].

Интересно отметить, что для геостационарной орбиты ( $\omega_0 = \omega_E$ ) все полученные условия устойчивости упрощаются ( $\tilde{\mu} = 0$ ).

Для цилиндрической прецессии условия устойчивости имеют вид:

$$\alpha < 1 + \frac{1}{4}\bar{\Omega}, \quad \alpha < 1 + \bar{\Omega}.$$

Наличие электростатической защиты в данном случае не влияет на условия устойчивости гиперболоидальной ( $\alpha < 1$ ) и конической ( $\alpha > 1$ ) прецессий.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Определены стационарные движения динамически симметричного спутника, оснащенного системой электростатической защиты, движущегося в гравитационном и магнитном полях. Приведены условия существования этих решений и получены достаточные условия их устойчивости на основании прямого метода Ляпунова. Результаты работы обобщают известные условия устойчивости, имеющие место для спутников, движущихся в гравитационном поле.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено за счет гранта Российской научного фонда № 24-21-00104, <https://rscf.ru/project/24-21-00104/>.

Работа В.Ю. Сахарова по построению тензора статических моментов заряда второго порядка выполнена при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (проект 116636233).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов В.М. Устойчивость движения космических аппаратов. Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1971. С. 1–83.
2. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников. Итоги науки и техники. Сер. Исследование космического пространства. М.: ВИНИТИ, 1978. Т. 11. 223 с.
3. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Издательство Московского университета. 1975. 308 с.
4. Черноусько Ф.Л. Об устойчивости регулярных прецессий спутника // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. Вып. 1. С. 155–157.
5. Likins P.W. Stability of a symmetrical satellite in attitudes fixed in an orbiting reference frame // J. Astronaut. Science. 1965. V. 12. Iss. 1. P. 18–24.
6. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: Выч. центр АН СССР, 1967. 141 с.
7. Морозов В.М. Об устойчивости движения гиростата под действием гравитационного, магнитного и аэродинамического моментов // Космич. исслед. 1967. Т. 5. № 3. С. 727–732.
8. Сарычев В.А., Овчинников М.Ю. Магнитные системы ориентации искусственных спутников Земли. Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 23. 104 с.
9. Тихонов А.А. Резонансные явления в колебаниях гравитационно-ориентированного твердого тела. Ч.4: многочастотные резонансы // Вестник С.—Петербург. университета. Сер. 1. 2000. Вып. 1. С. 131–137.
10. Морозов В.М., Каленова В.И. Линейные нестационарные системы и стабилизация движения спутника около центра масс в геомагнитном поле. М.: Издательство МГУ, 2023. 174 с.
11. Труханов К.А., Рябова Т.Я., Морозов Д.Х. Активная защита космических кораблей. М.: Атомиздат, 1970.
12. Spillantini P. Manned exploration and exploitation of Solar System: Passive and active shielding for protecting astronauts from ionizing radiation — A short overview // Acta Astronautica. 2014. V. 104. P. 509–515.
13. Tripathi R., Wilson J., Youngquist R. Electrostatic space radiation shielding // Advances in Space Research. 2008. V. 42. P. 1043–1049.
14. Joshi R., Qiu H., Tripathi R. Configuration studies for active electrostatic space radiation shielding// Acta Astronautica. 2013. V. 88. P. 138–145.
15. Smith J.G., Smith T., Williams M. et al. Potential Polymeric Sphere Construction Materials for a Spacecraft Electrostatic Shield // Langley Research Center. Technical Memorandum. 2006. Art. ID 20060013423.
16. Петров К.Г., Тихонов А.А. Момент сил Лоренца, действующих на заряженный спутник в магнитном поле Земли. Ч. 1: Напряженность магнитного поля Земли в орбитальной системе координат // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Матем., Мех., Астроном. 1999. Вып. 1. С. 92–100.
17. Петров К.Г., Тихонов А.А. Момент сил Лоренца, действующих на заряженный спутник в магнитном поле Земли. Ч. 2: Вычисление момента и оценки его составляющих // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Матем., Мех., Астроном. 1999. Вып. 3. С. 81–91.
18. Тихонов А.А. О вековой эволюции ротационного движения заряженного ИСЗ на регрессирующей орбите // Космич. исслед. 2005. Т. 43. № 2. С. 111–125.
19. Антипов К.А., Тихонов А.А. Электродинамическое управление в задаче о стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле // Космич. исслед. 2014. Т. 52. № 6. С. 512–520.
20. Giri D.K., Sinha M., Kumar K.D. Fault-tolerant attitude control of magneto-Coulombic satellites // Acta Astronautica. 2015. V. 116. P. 254–270.
21. Schaub H., Parker G., King L. Challenges and prospects of Coulomb spacecraft formation control // J. Astronautical Sciences. 2004. V. 52. P. 169–193.
22. Pollock G.E., Gangestad J.W., Longuski J.M. Analytical Solutions for the Relative Motion of Spacecraft with Lorentz Force Perturbations // Acta Astronautica. 2011. V. 68. Iss. 1–2. P. 204–217.
23. Тихонов А.А. Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле // Космич. исслед. 2003. Т. 41. № 1. С. 69–79.
24. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматлит, 1961. 824 с.
25. Kennedy J., Eberhart R. Particle Swarm Optimization // Proc. IEEE International Conference on Neural Networks. Perth, WA, Australia. 1995. V. 4. P. 1942–1948.
26. Shi Y., Eberhart R.C. A modified particle swarm optimizer // Proc. IEEE International Conference on Evolutionary Computation. Anchorage, AK, USA. 1998. P. 69–73.
27. Dmitriev N.N., Sakharov V.Yu., Tikhonov A.A. The method of zero tangential strengths in the problem of charge distribution over the surfaces of two interacting tori // J. Applied and Computational Mechanics. 2025. DOI: 10.22055/jacm.2025.48138.5009

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Для конструкции, изображенной на рис. 1, обозначим  $R_M, r_M, Q_M, R_C, r_C, Q_C, R_B, r_B, Q_B$  геометрические и физические параметры, где индексы М, С, Б относятся к параметрам малого, среднего и большого торов, соответственно,  $R$  — расстояние от центра образующей окружности до оси симметрии, перпендикулярной плоскости ориентации;  $r$  — радиус образующей окружности;  $Q$  — величина электростатического заряда, поданного на тор.

Полагалось  $R_B = 9, r_B = 1$ , а остальные семь величин  $R_M, r_M, Q_M, R_C, r_C, Q_C, Q_B$  с учетом ограничений

$$Q_M > 0, \quad Q_C > 0, \quad Q_B > 0, \quad r_M > 0, \quad r_C > 0,$$

$$6r_M \leq R_M \leq 12r_M, \quad 6r_C \leq R_C \leq 12r_C,$$

$$R_M - r_M \geq 2, \quad R_C + r_C \leq 7, \quad R_M + r_M + 2 \leq R_C - r_C$$

подбирались методом роя частиц [25, 26] путем

минимизации величины  $\left| \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right|$ , где интегралы,

являющиеся слагаемыми в статических моментах заряда второго порядка  $a_1$  и  $a_2$ , находились численно по той же методике, которая ранее применялась в аналогичной задаче с двумя торами [27].

При этом для каждой конкретной комбинации указанных параметров плотности распределения зарядов на тороидальных оболочках (с учетом взаимодействия распределений зарядов на разных торах) определялись методом градиентного спуска, минимизирующим (практически до нуля) сумму по трем торам поверхностных интегралов от квадрата касательной составляющей напряженности сил Кулона.

В итоге было получено следующее решение:  $R_M = 2.442, R_C = 6.342, r_M = 0.283, r_C = 0.556, Q_M = 0.084, Q_C = 1.185, Q_B = 0.033$ . Для подобранных значений параметров на рис. П1 цветовой гаммой показаны плотности распределения

электростатических зарядов. Для всех трех торов изображен вид сбоку. Для малого тора он соответствует виду с конца оси  $Oy$ , для среднего — виду с конца оси  $Oz$ , для большого — с конца оси  $Ox$ . Горизонтальные отрезки между малым и средним торами соответствуют участкам оси  $Ox$ , а вертикальные — оси  $Oy$ . Они на рис. П1 визуально соединяют точки торов, максимально близкие друг к другу. Именно в этих точках наблюдается взаимодействие зарядов, которое, в частности, проявляется в наличии на большом торе зоны с отрицательной плотностью зарядов (синий цвет), достигающей по абсолютной величине значения 0.012 (и это при том, что суммарный заряд на большом торе положительный!). Соответственно, в точках среднего тора, максимально близких к большому тору оказывается наибольшая положительная плотность заряда (красный цвет), равная 0.014.

Вычисленные величины оказались:  $a_1 = a_2 = 23.98, a_3 = 12.97$ . Таким образом, принятое в работе предположение  $a_1 = a_2$  реализуемо.

Отметим, что компьютерная программа позволяет подобрать параметры и так, что будут выполнены два других возможных равенства для статических моментов зарядов второго порядка. Если потребовать условие  $a_1 = a_3$ , то оно будет достижимо при следующих значениях параметров:  $R_M = 2.574, R_C = 6.008, r_M = 0.263, r_C = 0.838, Q_M = 0.097, Q_C = 0.899, Q_B = 0.211$ . На рис. П2 показано соответствующее этому случаю распределение зарядов, вычисленные статические моменты заряда второго порядка равны:  $a_1 = a_3 = 17.74, a_2 = 25.32$ .

Если положить  $a_2 = a_3$ , то оно будет достижимо при следующих значениях параметров:  $R_M = 2.932, R_C = 5.895, r_M = 0.422, r_C = 0.492, Q_M = 0.646, Q_C = 0.089, Q_B = 0.014$ . На рис. П3 показано соответствующее этому случаю распределение зарядов, вычисленные статические моменты заряда второго порядка равны:  $a_2 = a_3 = 6.07, a_1 = 4.22$ .

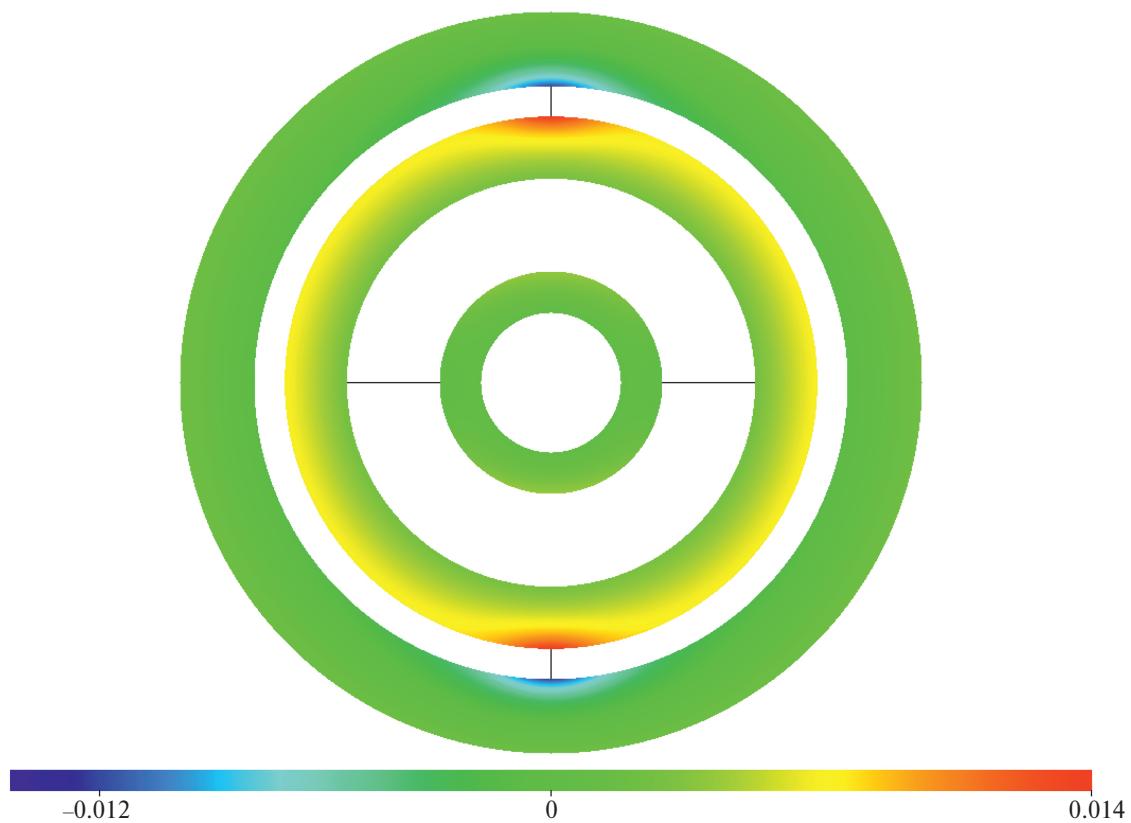


Рис. П1. Распределение зарядов, обеспечивающих выполнение равенства  $a_1 = a_2$

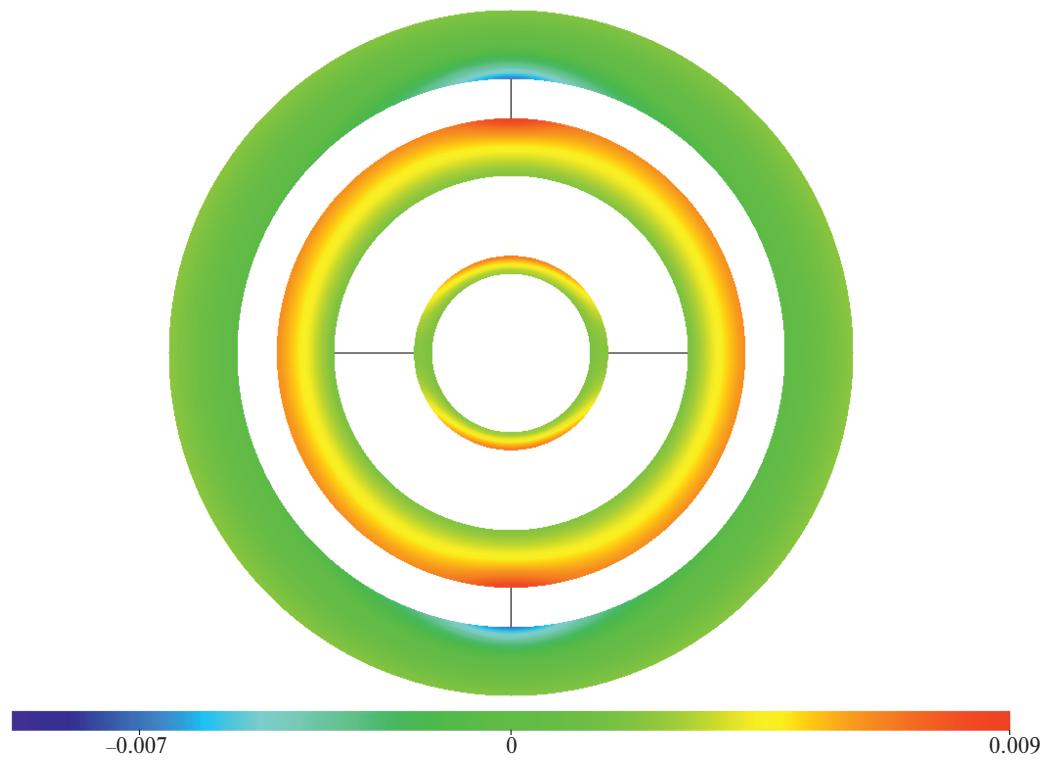


Рис. П2. Распределение зарядов, обеспечивающих выполнение равенства  $a_1 = a_3$

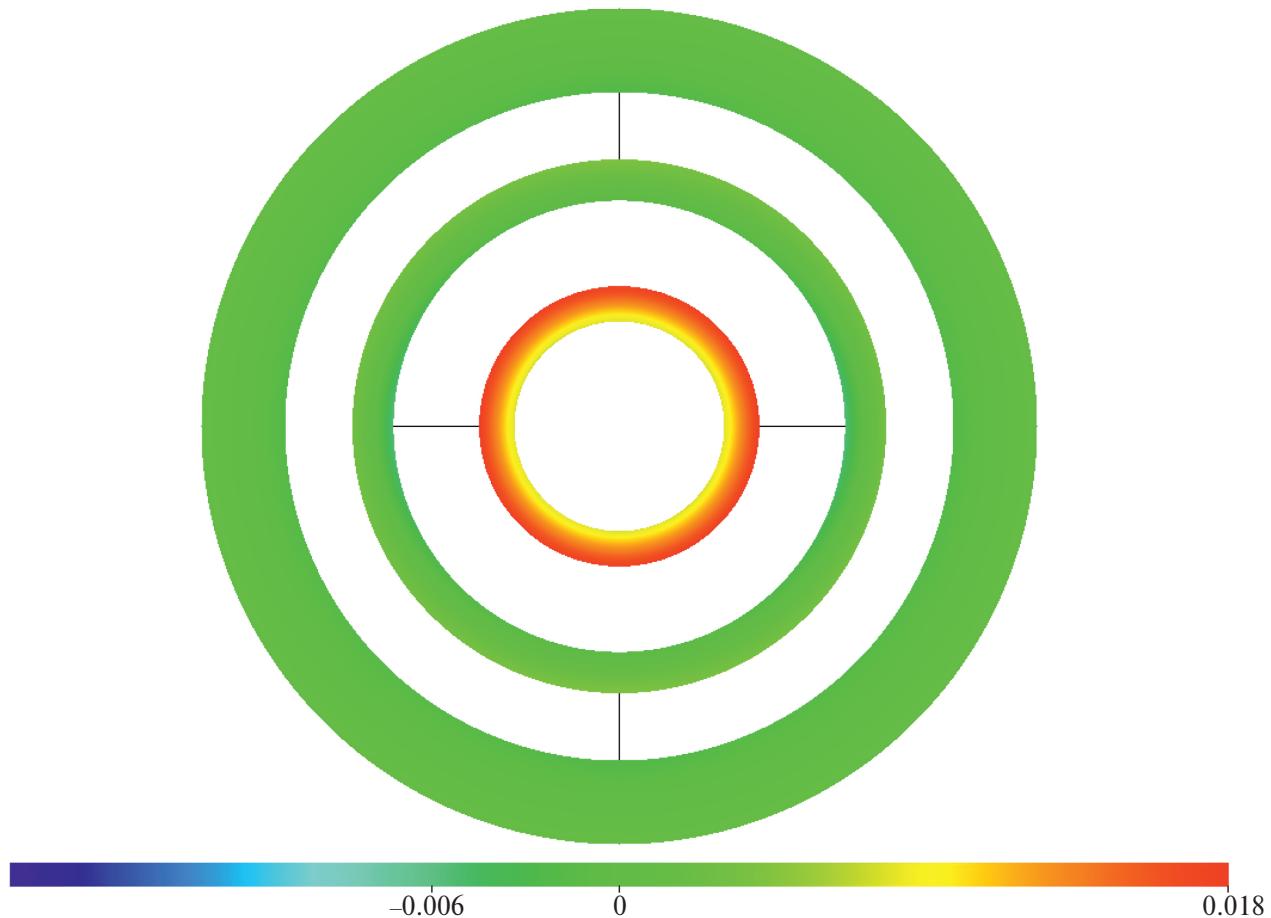


Рис. П3. Распределение зарядов, обеспечивающих выполнение равенства  $a_2 = a_3$

## ON THE STEADY-STATE MOTIONS STABILITY OF SATELLITE WITH CHARGE DISTRIBUTION CENTER OF PROTECTIVE SCREENS IN THE MASS CENTER

© 2025 V. I. Kalenova<sup>1,\*</sup>, V. M. Morozov<sup>1, \*\*</sup>, V. Yu. Saharov<sup>2, \*\*\*</sup>,  
A. A. Tikhonov<sup>2, \*\*\*\*</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*St. Petersburg University, St. Petersburg, Russia*

\*e-mail: kalenova44@mail.ru

\*\*e-mail: moroz@imec.msu.ru

\*\*\*e-mail: v.sakharov@spbu.ru

\*\*\*\*e-mail: a.tikhonov@spbu.ru

A satellite with a system of three concentric shields for electrostatic protection against cosmic radiation is considered. The interaction of an electric charge with the Earth's magnetic field leads to the emergence of a Lorentz force moment, acting on the rotational motion of the satellite relative to the center of mass. The Lorentz force moment is calculated taking into account the complex shape of the electrostatic protection screens and the geomagnetic field gradient in the volume of the screen. The geomagnetic field is modeled by a direct magnetic dipole.